1

解答解説のページへ

放物線 $R : y=-x^2+6$ と直線 $l : y=x$ との交点を A, B とする。直線 $y=x+t$ $(t>0)$ は放物線 R と相異なる 2 点 $\mathrm{C}(t)$, $\mathrm{D}(t)$ で交わるものとする。

(1) 放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2) 4 つの点 A, B, $\mathrm{C}(t)$, $\mathrm{D}(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}$ とおく。$f(t)$ の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 から 13 までの数が 1 つ書かれているカードが 52 枚あり，各数について 4 枚ずつある。この 52 枚のカードから，戻さずに続けて 2 枚とりだし，そのカードに書かれた数を順に x, y とする。関数 $f(x,\ y) = \log_3(x+y) - \log_3 x - \log_3 y + 1$ を考える。

(1) カードに書かれた数 x, y で，$f(x,\ y) = 0$ となるものをすべて求めよ。

(2) $f(x,\ y) = 0$ となる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

(1)　複素数 z を未知数とする方程式 $z^6=64$ の解をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた解 $z=p+qi$（p, q は実数）のうち，次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件：x を未知数とする 3 次方程式 $x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$ が，
整数の解を少なくとも 1 つもつ。

1

問題のページへ

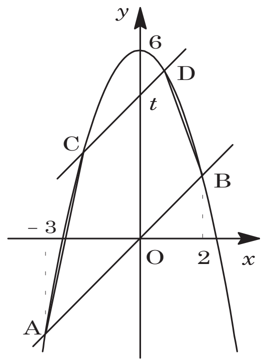
(1)　$R: y=-x^2+6$ ……①，$l: y=x$ ……②の交点は，

$$-x^2+6=x,\ x^2+x-6=0$$

よって，$x=-3,\ 2$ となり，

$$T=\int_{-3}^{2}(-x^2+6-x)\,dx=\int_{-3}^{2}-(x+3)(x-2)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(2+3)^3=\frac{125}{6}$$



(2)　直線 $y=x+t$ ……③と①が異なる 2 点で交わる条件は，

$$-x^2+6=x+t,\ x^2+x+t-6=0 \text{ ……④}$$

④の判別式 $D=1-4(t-6)>0$，$t<\dfrac{25}{4}$

$t>0$ と合わせて，$0<t<\dfrac{25}{4}$

このとき④の解は，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-4t+25}}{2}$ となる。これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$\mathrm{C}(\alpha,\ \alpha+t)$，$\mathrm{D}(\beta,\ \beta+t)$ となることより，

$$\mathrm{CD}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta+t-\alpha-t)^2}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-4t+25}$$

直線②と直線③の距離は，原点と直線③の距離に等しく，$\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ となるので，

$$S=\frac{1}{2}(\sqrt{2}\cdot\sqrt{-4t+25}+5\sqrt{2})\cdot\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}t(\sqrt{-4t+25}+5)$$

すると，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}=\dfrac{6}{125}\cdot\dfrac{1}{2}t(\sqrt{-4t+25}+5)=\dfrac{3}{125}t(\sqrt{-4t+25}+5)$

ここで，$s=\sqrt{-4t+25}$ とおくと，$0<t<\dfrac{25}{4}$ から $0<s<5$ であり，

$$s^2=-4t+5,\ t=\frac{25-s^2}{4}$$

さらに，$f(t)=g(s)$ とおくと，

$$g(s)=\frac{3}{125}\cdot\frac{25-s^2}{4}(s+5)=\frac{3}{500}(-s^3-5s^2+25s+125)$$

$$g'(s)=\frac{3}{500}(-3s^2-10s+25)$$

$$=-\frac{3}{500}(3s-5)(s+5)$$

s	0	…	$\frac{5}{3}$	…	5
$g'(s)$		＋	0	－	
$g(s)$		↗	$\frac{8}{9}$	↘	

右表より，$s=\dfrac{5}{3}$ のとき，$g(s)=f(t)$ は最大となり，最大値 $\dfrac{8}{9}$ をとる。

［解 説］

文系問題なので，置きかえをしなくては範囲外になってしまいます。

2

問題のページへ

(1)　$f(x,\ y)=0$ より，$\log_3(x+y)-\log_3 x-\log_3 y+1=0$

$$\log_3(x+y)=\log_3 xy$$

$3(x+y)=xy$ より，$(x-3)(y-3)=9$

$1\leqq x\leqq 13,\ 1\leqq y\leqq 13$ より，$-2\leqq x-3\leqq 10$，$-2\leqq y-3\leqq 10$ となり，

$$(x-3,\ y-3)=(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1)$$

よって，$(x,\ y)=(4,\ 12),\ (6,\ 6),\ (12,\ 4)$

(2)　x, y のとりだし方の総数は，${}_{52}\mathrm{P}_2=52\times 51$ 通りである。

$(x,\ y)=(4,\ 12)$ となるカードのとりだし方は $4\times 4=16$ 通り。

$(x,\ y)=(6,\ 6)$ となるカードのとりだし方は $4\times 3=12$ 通り。

$(x,\ y)=(12,\ 4)$ となるカードのとりだし方は $4\times 4=16$ 通り。

よって，$f(x,\ y)=0$ となる確率は,

$$\frac{16+12+16}{52\times 51}=\frac{11}{663}$$

［解　説］

見かけよりははるかに簡単な基本問題です。

3

問題のページへ

(1)　$z^6=64$ より，$z^6-8^2=0$ から，

$$(z^3-8)(z^3+8)=0,\ (z-2)(z+2)(z^2+2z+4)(z^2-2z+4)=0$$

よって，$z=\pm2,\ -1\pm\sqrt{3}i,\ 1\pm\sqrt{3}i$

(2)　(i)　$z=\pm2$ のとき

複号同順で，$x^3\mp2=0$ となり，整数解は存在しない。

(ii)　$z=-1+\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3+3x+4=0,\ (x+1)(x^2-x+4)=0$$

よって，整数解 $x=-1$ をもつ。

(iii)　$z=-1-\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3-3x+4=0,\ x(3-x^2)=4\cdots\cdots\cdots①$$

これより，①が整数解をもつならば 4 の約数となり，整数解として $x=\pm1,\ \pm2$，±4 の場合を調べればよい。ここで，$f(x)=x^3-3x+4$ とおくと，

$$f(1)=2,\ f(-1)=6,\ f(2)=6,\ f(-2)=2,\ f(4)=56,\ f(-4)=-48$$

よって，$f(x)=0$ は整数解をもたない。

(iv)　$z=1+\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3+3x+2=0,\ x(-3-x^2)=2\cdots\cdots\cdots②$$

これより，②が整数解をもつならば 2 の約数となり，整数解として $x=\pm1,\ \pm2$ の場合を調べればよい。ここで，$g(x)=x^3+3x+2$ とおくと，

$$g(1)=6,\ g(-1)=-2,\ g(2)=16,\ g(-2)=-12$$

よって，$g(x)=0$ は整数解をもたない。

(v)　$z=1-\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3-3x+2=0,\ (x-1)^2(x+2)=0$$

よって，整数解 $x=1,\ -2$ をもつ。

(i)～(v)より，求める z は，$z=-1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$

［解 説］

すべての場合をチェックするのは面倒ですが，しかし，それは時間の問題にすぎません。