1

解答解説のページへ

放物線 $R: y=-x^2+3$ と直線 $l: y=2x$ との交点を A, B とする。直線 $y=2x+t$ $(t>0)$ は放物線 R と相異なる 2 点 $\mathrm{C}(t)$, $\mathrm{D}(t)$ で交わるものとする。

(1) 放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2) 4 つの点 A, B, $\mathrm{C}(t)$, $\mathrm{D}(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}$ とおく。$f(t)$ の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

(1)　複素数 z を未知数とする方程式 $z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$ の解をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた解 $z=p+qi$（p，q は実数）のうち，次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件：x を未知数とする 3 次方程式 $x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$ が，
整数の解を少なくとも 1 つもつ。

3

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，同時に動き出す。

(1) 動き出してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 1)$ のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ。

(2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t\,(0\leqq t\leqq 1)$ の値を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{4a}$　解答解説のページへ

整数に値をとる変数 x の値が，次の規則で変化する。

(i)　ある時刻で $x=m\ (m\neq 0)$ のとき，1 秒後に $x=m+1$，$x=m-1$ である確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である。

(ii) ある時刻で $x=0$ のとき，1 秒後に $x=1$ である確率は q，$x=-1$ である確率は $1-q$ である $(0\leqq q\leqq 1)$。$x=0$ から始めて，n 秒後 $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に $x=m$ である確率を $p_n(m)$ とする。

(1)　$p_3(1)+p_3(-1)$ を求めよ。

(2)　すべての自然数 n に対して次が成り立つことを示せ。
　どんな整数 m についても $p_n(m)+p_n(-m)$ は q によらない。

(3)　$p_n(0)$ を求めよ。

$\boxed{4b}$

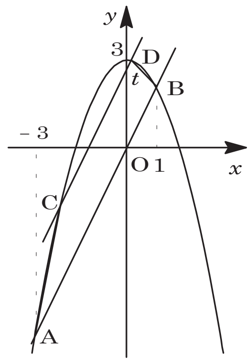
解答解説のページへ

(1)　連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$R: y=-x^2+3$ ……①，$l: y=2x$ ……②の交点は，

$$-x^2+3=2x,\ x^2+2x-3=0$$

よって，$x=-3,\ 1$となり，

$$T=\int_{-3}^{1}(-x^2+3-2x)\,dx=\int_{-3}^{1}-(x+3)(x-1)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1+3)^3=\frac{32}{3}$$

(2)　直線$y=2x+t$ ……③と①が異なる2点で交わる条件は，

$$-x^2+3=2x+t,\ x^2+2x+t-3=0 \text{ ……④}$$

④の判別式$D/4=1-(t-3)>0$から，$0<t<4$となる。

このとき④の解は，$x=-1\pm\sqrt{4-t}$であり，これを$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とすると，$\mathrm{C}(\alpha,\ 2\alpha+t)$，$\mathrm{D}(\beta,\ 2\beta+t)$となることより，

$$\mathrm{CD}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(2\beta+t-2\alpha-t)^2}=\sqrt{5}(\beta-\alpha)=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{4-t}$$

また，$\mathrm{AB}=4\sqrt{5}$，原点と直線③の距離は，$\dfrac{|t|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{t}{\sqrt{5}}$となるので，

$$S=\frac{1}{2}(2\sqrt{5}\cdot\sqrt{4-t}+4\sqrt{5})\cdot\frac{t}{\sqrt{5}}=t(\sqrt{4-t}+2)$$

すると，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}=\dfrac{3}{32}t(\sqrt{4-t}+2)$

ここで，$s=\sqrt{4-t}$とおくと，$0<t<4$から$0<s<2$であり，

$$s^2=4-t,\ t=4-s^2$$

さらに，$f(t)=g(s)$とおくと，

$$g(s)=\frac{3}{32}(4-s^2)(s+2)=\frac{3}{32}(-s^3-2s^2+4s+8)$$

$$g'(s)=\frac{3}{32}(-3s^2-4s+4)$$

$$=-\frac{3}{32}(3s-2)(s+2)$$

s	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$g'(s)$		$+$	0	$-$	
$g(s)$		$\nearrow$	$\frac{8}{9}$	$\searrow$	

右表より，$s=\dfrac{2}{3}$のとき，$g(s)=f(t)$は最大となり，最大値$\dfrac{8}{9}$をとる。

［解 説］

そのまま$f'(t)$の計算をして$f(t)$の増減を調べることも可能ですが，文系と同じく，置きかえをしました。

2

問題のページへ

(1)　$z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$ より，$(z+2)(z^4+4z^2+16)=0$ から，

$$(z+2)(z^4+8z^2+16-4z^2)=0,\ (z+2)(z^2+4+2z)(z^2+4-2z)=0$$

よって，$z=-2,\ -1\pm\sqrt{3}i,\ 1\pm\sqrt{3}i$

(2)　(i)　$z=-2$ のとき

このとき，$x^3+2=0$ となり，整数解は存在しない。

(ii)　$z=-1+\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3+3x+4=0,\ (x+1)(x^2-x+4)=0$$

よって，整数解 $x=-1$ をもつ。

(iii)　$z=-1-\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3-3x+4=0,\ x(3-x^2)=4\ \cdots\cdots\cdots①$$

これより，①が整数解をもつならば 4 の約数となり，整数解として $x=\pm1,\ \pm2,\ \pm4$ の場合を調べればよい。ここで，$f(x)=x^3-3x+4$ とおくと，

$$f(1)=2,\ f(-1)=6,\ f(2)=6,\ f(-2)=2,\ f(4)=56,\ f(-4)=-48$$

よって，$f(x)=0$ は整数解をもたない。

(iv)　$z=1+\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3+3x+2=0,\ x(-3-x^2)=2\ \cdots\cdots\cdots②$$

これより，②が整数解をもつならば 2 の約数となり，整数解として $x=\pm1,\ \pm2$ の場合を調べればよい。ここで，$g(x)=x^3+3x+2$ とおくと，

$$g(1)=6,\ g(-1)=-2,\ g(2)=16,\ g(-2)=-12$$

よって，$g(x)=0$ は整数解をもたない。

(v)　$z=1-\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3-3x+2=0,\ (x-1)^2(x+2)=0$$

よって，整数解 $x=1,\ -2$ をもつ。

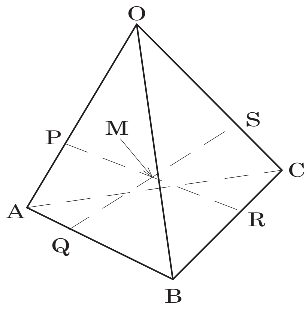
(i)～(v)より，求める z は，$z=-1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$

［解 説］

すべての場合をチェックするのは面倒ですが，しかし，それは時間の問題にすぎません。文系に類題が出ています。

3

問題のページへ



(1)　t 秒後には，$\mathrm{OP}=\mathrm{BR}=t$，$\mathrm{AQ}=\mathrm{CS}=\frac{1}{2}t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{c}$$

(2)　QS と PR の交点が M なので，まず M は QS 上にあることより，k を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OS}}$$
$$=k\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{1}{2}kt\vec{b}+(1-k)\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{c}$$

また，M は PR 上にあることより，l を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=l\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=lt\vec{a}+(1-l)(1-t)\vec{b}+(1-l)t\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$k\left(1-\frac{1}{2}t\right)=lt \cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{1}{2}kt=(1-l)(1-t)\cdots\cdots\cdots②$$

$$(1-k)\left(1-\frac{1}{2}t\right)=(1-l)t\cdots\cdots\cdots③$$

①＋③から，$1-\frac{1}{2}t=t$ より，$t=\frac{2}{3}$

①に代入して $k=l$，②に代入して $k+l=1$ となるので，$k=l=\frac{1}{2}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

［解 説］

よく見かける空間ベクトルの基本問題です。

$\boxed{\textbf{4a}}$ 問題のページへ

(1)　3 秒後に，$x=1$であるのは，$0\to1\to2\to1$，$0\to1\to0\to1$，$0\to-1\to0\to1$のいずれかの場合より，

$$p_3(1)=q\left(\frac{1}{2}\right)^2+q\cdot\frac{1}{2}q+(1-q)\cdot\frac{1}{2}q=\frac{3}{4}q$$

$x=-1$であるのは，$0\to1\to0\to-1$，$0\to-1\to0\to-1$，$0\to-1\to-2\to-1$のいずれかの場合より，

$$p_3(-1)=q\cdot\frac{1}{2}(1-q)+(1-q)\cdot\frac{1}{2}(1-q)+(1-q)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(1-q)$$

よって，$p_3(1)+p_3(-1)=\dfrac{3}{4}$

(2)　すべての自然数 n に対して，$p_n(m)+p_n(-m)$は q にはよらないことを数学的帰納法を用いて示す。なお，$m\geqq0$としても一般性を失うことはない。

(i)　$n=1$のとき

$m\neq1$のとき $p_1(m)+p_1(-m)=0$，$m=1$のとき $p_1(1)+p_1(-1)=1$となり，ともに q にはよらない。

(ii)　$n=k$のとき

$p_k(m)+p_k(-m)$は q にはよらないと仮定する。

$m\neq1$のとき，$p_{k+1}(m)=\dfrac{1}{2}p_k(m-1)+\dfrac{1}{2}p_k(m+1)$

$$p_{k+1}(-m)=\frac{1}{2}p_k(-m-1)+\frac{1}{2}p_k(-m+1)$$

よって，$p_{k+1}(m)+p_{k+1}(-m)$は，

$$\frac{1}{2}\{p_k(m-1)+p_k(-m+1)\}+\frac{1}{2}\{p_k(m+1)+p_k(-m-1)\}$$

すなわち，この値は q にはよらない。

$m=1$のとき，$p_{k+1}(1)=q\cdot p_k(0)+\dfrac{1}{2}p_k(2)$

$$p_{k+1}(-1)=\frac{1}{2}p_k(-2)+(1-q)p_k(0)$$

すると，
$$\begin{aligned}p_{k+1}(1)+p_{k+1}(-1)&=p_k(0)+\frac{1}{2}\{p_k(2)+p_k(-2)\}\\&=\frac{1}{2}\{p_k(0)+p_k(0)\}+\frac{1}{2}\{p_k(2)+p_k(-2)\}\end{aligned}$$

よって，この値は q にはよらない。

(i)(ii)より，$p_n(m)+p_n(-m)$は q にはよらない。

(3)　条件から，$p_n(0)=\dfrac{1}{2}\{p_{n-1}(1)+p_{n-1}(-1)\}$

すると，(2)より $p_n(0)$は q にはよらないので，$q=\dfrac{1}{2}$として計算しても構わない。以下, n を偶奇に場合分けをして，$p_n(0)$を求める。

(i)　n が偶数のとき

$x=0$ となるのは, 1 だけ増加するのが $\frac{n}{2}$ 回, 1 だけ減少するのが $\frac{n}{2}$ 回より,

$$p_n(0)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}={}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(ii)　n が奇数のとき

$x=0$ となる場合はないので, $p_n(0)=0$

［解 説］

(2)から(3)への連結がポイントです。(2)の結論から q は任意の値を設定してよいので, 当然, $q=\frac{1}{2}$ とするわけです。

$\boxed{4\mathrm{b}}$

問題のページへ

(1)　$I=\int_0^{\pi}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx$ とし，$t=\pi-x$ とおくと，$dt=-dx$ から，

$$I=\int_{\pi}^{0}\left(\pi-t-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-t)(-dt)=-\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-t)\,dt$$

ここで，$f(\pi-x)=f(x)$ から，$I=-\int_0^{\pi}\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)f(t)\,dt=-I$ となり，

$$I=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$$

(2)　$f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$ とおくと，

$$f(\pi-x)=\frac{\sin^3(\pi-x)}{4-\cos^2(\pi-x)}=\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}=f(x)$$

すると, (1)より，$\int_0^{\pi}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ となり，$J=\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ とおくと，

$$J=\int_0^{\pi}xf(x)\,dx=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}f(x)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2 x}{4-\cos^2 x}\cdot\sin x\,dx$$

さらに，$\cos x=u$ とおくと，$-\sin x\,dx=du$ から，

$$J=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1-u^2}{4-u^2}(-du)=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1-u^2}{4-u^2}du=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{3}{4-u^2}\right)du$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\Big[\,u\,\Big]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{3}{(u+2)(u-2)}du\right\}=\frac{\pi}{2}\left\{2+\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)du\right\}$$

$$=\pi\left\{1+\frac{3}{8}\Big[\log\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\Big]_{-1}^{1}\right\}=\pi\left\{1+\frac{3}{8}\left(\log\frac{1}{3}-\log 3\right)\right\}=\pi\left(1-\frac{3}{4}\log 3\right)$$

[解 説]

置換積分の計算問題です。(1)のわかりやすい誘導があるために，方針に混乱は生じません。