1

解答解説のページへ

$0 \leqq k \leqq 1$ を満たす実数 k に対して，xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D, E, F を考える。

D は連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \leqq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y \leqq x^2$，$y \geqq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y \leqq -x^2 + 2x$，$y \geqq kx$ で表される領域

(1) 領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。

(2) (1)で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と，その最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

xy 平面上に点 $\mathrm{A}(2,\ 4)$ がある。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が x 軸上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ とするとき，$p,\ q,\ t$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。

3

解答解説のページへ

正六面体の各面に 1 つずつ，サイコロのように，1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし，これらの 4 面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)\ (n \geqq 1)$ で表す。$q_n = p_n(1) + p_n(6)\ \ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ とおく。

(1)　q_1，q_2 を求めよ。

(2)　q_n を q_{n-1} で表し，q_n を求めよ。

(3)　$p_n(1)$ を求めよ。

1

問題のページへ

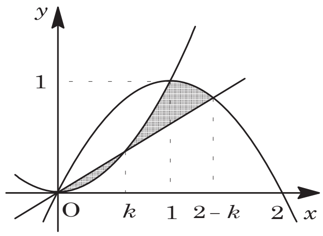
(1)　$D: y \geqq x^2$，$y \leqq kx$，$E: y \leqq x^2$，$y \geqq kx$，$F: y \leqq -x^2+2x$，$y \geqq kx$ より，これらの 3 つの領域の境界線は，$y = x^2$ ……①，$y = kx$ ……②，$y = -x^2+2x$ ……③である。

①と②の交点は，$x^2 = kx$ より，$x = 0,\ k$

①と③の交点は，$x^2 = -x^2+2x$ より，$x = 0,\ 1$

②と③の交点は，$kx = -x^2+2x$ より，

$x = 0,\ 2-k$



これより，領域 $D\cup(E\cap F)$ を図示すると，右図の網点部となり，その面積 $m(k)$ は，

$$m(k) = \int_0^{2-k}(-x^2+2x-kx)\,dx - \int_0^1(-x^2+2x-x^2)\,dx + 2\int_0^k(kx-x^2)\,dx$$

$$= -\int_0^{2-k}x(x-2+k)\,dx + 2\int_0^1 x(x-1)\,dx - 2\int_0^k x(x-k)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(2-k)^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^3 + 2\cdot\frac{1}{6}k^3 = \frac{1}{6}(k^3+6k^2-12k+6)$$

$$= \frac{1}{6}k^3 + k^2 - 2k + 1$$

(2)　(1)より，$m'(k) = \frac{1}{2}k^2 + 2k - 2 = \frac{1}{2}(k^2+4k-4)$

$m'(k) = 0$ とすると，$k = -2\pm 2\sqrt{2}$

$0\leqq k\leqq 1$ より，$m(k)$ の値の変化は右表のようになり，$k = -2+2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

k	0	$\cdots$	$-2+2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$m'(k)$		$-$	0	$+$	
$m(k)$		↘		↗	

ここで，$k^3+6k^2-12k+6$ を k^2+4k-4 で割ると，

$$k^3+6k^2-12k+6 = (k^2+4k-4)(k+2) - 16k + 14$$

これより，最小値 $m(-2+2\sqrt{2})$ は，

$$m(-2+2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\left\{-16(-2+2\sqrt{2})+14\right\} = \frac{1}{3}(23-16\sqrt{2})$$

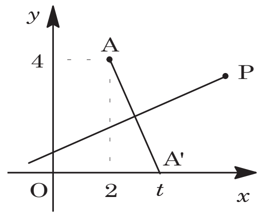
[解 説]

1999 年に続き，いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式の適用パズルが出題されました。ただ，本年の問題は，ひねりが加わっています。

2

問題のページへ

(1)　ピッタリ直線 l は，線分 $\mathrm{AA'}$ の垂直二等分線より，



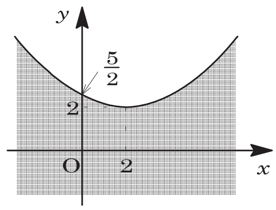
$\mathrm{PA}=\mathrm{PA'}$ となり，

$$(p-2)^2+(q-4)^2=(p-t)^2+q^2$$

$$-4p+4-8q+16=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+4p+8q-20=0$ ………①

(2)　①が異なる 2 つの実数解をもつとき点 $\mathrm{A'}(t,\ 0)$ は 2 つ存在し，このときピッタリ直線は 2 本存在することより，



$$D/4=p^2-(4p+8q-20)>0$$

$$8q<p^2-4p+20,\ q<\frac{1}{8}(p-2)^2+2$$

点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

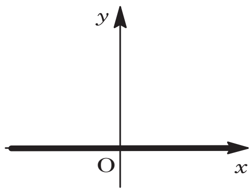
(3)　①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1$，t_2 とおき，$\mathrm{A}_1'(t_1,\ 0)$，$\mathrm{A}_2'(t_2,\ 0)$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}_1'}=(t_1-2,\ -4),\ \overrightarrow{\mathrm{AA}_2'}=(t_2-2,\ -4)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{\mathrm{AA}_1'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AA}_2'}=0$ となり，

$$(t_1-2)(t_2-2)+16=0,\ t_1t_2-2(t_1+t_2)+20=0 \text{ ………②}$$

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，



$$t_1+t_2=2p,\ t_1t_2=4p+8q-20$$

②に代入して，$4p+8q-20-4p+20=0$

よって，$q=0$ となり，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は x 軸上に存在する。

図示すると，右図の太線部となる。

［解 説］

線対称を題材にした問題です。対称な 2 点を結ぶ線分の垂直二等分線が対称軸ということに注目するとクリアーです。

3

問題のページへ

(1)　まず，試行後の新しい底面の数字と，その数値になる確率を表にまとめる。

(i)　底面の数字が 1 または 6 のとき

新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかとなる。

新しい底面	2	3	4	5
確　率	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$

(ii)　底面の数字が 2 または 5 のとき

新しい底面の数字は 1, 3, 4, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	3	4	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

(iii) 底面の数字が 3 または 4 のとき

新しい底面の数字は 1, 2, 5, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	2	5	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$

さて，底面の数字が 1 であるとき，試行を 1 回行うと，新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかであるので，

$$q_1 = p_1(1) + p_1(6) = 0$$

次に，試行を 2 回行ったとき，底面が 1 となるのは，$1\to2\to1$，$1\to3\to1$，$1\to4\to1$，$1\to5\to1$ の場合，底面が 6 となるのは，$1\to2\to6$，$1\to3\to6$，$1\to4\to6$，$1\to5\to6$ の場合で，それぞれの確率は，

$$p_2(1) = \frac{2}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{3}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{4}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{5}{14}\times\frac{1}{14} = \frac{1}{14}$$

$$p_2(6) = \frac{2}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{3}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{4}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{5}{14}\times\frac{6}{14} = \frac{6}{14}$$

よって，$q_2 = p_2(1) + p_2(6) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$

(2)　n 回の試行の後，底面の数字が 1 または 6 となるのは，$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときである。

$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも，n 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 となる確率は，$\frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$ なので，

$$q_n = \frac{1}{2}(1 - q_{n-1}),\quad q_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(q_{n-1} - \frac{1}{3}\right)\quad (n \geqq 2)$$

$q_1 = 0$ より，$q_n - \frac{1}{3} = \left(q_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，

$$q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$に $n=1$ をあてはめると $q_1 = 0$ となり，$n=1$ のときも満たしている。

(3)　n 回の試行の後，底面の数字が 1 となるのは，$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときである。$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも，n 回の試行後，底面の数字が 1 になる確率は $\frac{1}{14}$ なので，

$$p_n(1)=\frac{1}{14}(1-q_{n-1})\quad (n\geqq 2)$$

すると, (2)より, $p_n(1)=\frac{1}{14}\cdot 2q_n=\frac{1}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdots\cdots\cdots(**)$

$(**)$ に $n=1$ をあてはめると $p_1(1)=0$ となり, $n=1$ のときも満たしている。

［解 説］

一見, 難しそうな題意を把握するために, (1)では, 考えた順にやや詳しく書きました。なお, 漸化式の威力が発揮されるこの手の問題は頻出です。名大では 1995 年に類題が出ています。