1

解答解説のページへ

$\triangle$ABC の辺 AB, BC, CA を $2:1$ に内分する点をそれぞれ A$'$, B$'$, C$'$ とし, $\triangle$A$'$B$'$C$'$ の辺 A$'$B$'$, B$'$C$'$, C$'$A$'$ を $2:1$ に内分する点をそれぞれ A$''$, B$''$, C$''$ とする。このとき直線 AA$''$, BB$''$, CC$''$ は$\triangle$ABC の重心で交わることを証明せよ。

2

解答解説のページへ

2 つの放物線 $C: y=\frac{1}{2}x^2$，$D: y=-(x-a)^2$ を考える。a は正の実数である。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ における C の接線 l を求めよ。

(2) l がさらに D と接するとき，l を C と D の共通接線という。2 本の（C と D の）共通接線 l_1，l_2 を求めよ。

(3) 共通接線 l_1，l_2 と C で囲まれた図形の面積を求めよ。

3a

解答解説のページへ

p を実数とする。方程式 $x^4+(8-2p)x^2+p=0$ が相異なる 4 個の実数解をもち，これらの解を小さい順に並べたとき，それらは等差数列をなすとする。この p を求めよ。

3b

解答解説のページへ

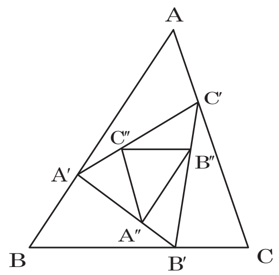
袋の中に赤と白の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1)　$p_3(m)$ を求めよ。

(2)　一般の N に対し $p_N(m)$ を求めよ。

1

問題のページへ



点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と表す。

A′，B′，C′ は，それぞれ辺 AB, BC, CA を 2 : 1 に内分する点なので，同様な記法をとると，

$$\vec{a'} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}),\ \vec{b'} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}),\ \vec{c'} = \frac{1}{3}(\vec{c} + 2\vec{a})$$

さらに，A″，B″，C″ は，それぞれ辺 A′B′，B′C′，C′A′ を 2 : 1 に内分する点なので，

$$\vec{a''} = \frac{1}{3}(\vec{a'} + 2\vec{b'}),\ \vec{b''} = \frac{1}{3}(\vec{b'} + 2\vec{c'})$$

$$\vec{c''} = \frac{1}{3}(\vec{c'} + 2\vec{a'})$$

まとめると，$\vec{a''} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{2}{3}(\vec{b} + 2\vec{c})\right\} = \frac{1}{9}(\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c})$

$$\vec{b''} = \frac{1}{9}(4\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}),\ \vec{c''} = \frac{1}{9}(4\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c})$$

さて，△ABC の重心を G とすると，$\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AA''}} = \frac{1}{9}(\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c}) - \vec{a} = \frac{4}{9}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} = \frac{1}{3}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AA''}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ となり，点 G は AA″ を 3 : 1 に内分する。

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{BB''}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{BG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CC''}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ となり，直線 AA″，BB″，CC″ は G で交わる。

［解 説］

平面上のベクトルについての基本問題です。なお，$\vec{a''} = \frac{1}{9}(\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c})$ の式を見て，$\vec{g} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 3\vec{a''})$ が発見できれば，記述量を減らすことができます。

2

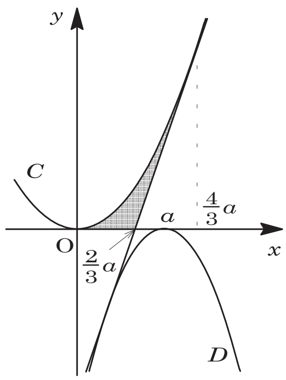
問題のページへ

(1)　$C:y=\dfrac{1}{2}x^2$ より $y'=x$ となり，$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ における接線 l の方程式は，

$$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t),\quad y=tx-\frac{1}{2}t^2\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$D:y=-(x-a)^2$ と l の共有点は，$-(x-a)^2=tx-\dfrac{1}{2}t^2$ から，

$$x^2+(t-2a)x+a^2-\frac{1}{2}t^2=0$$



D と l が接するので，判別式の値が 0 となり，

$$(t-2a)^2-4\left(a^2-\frac{1}{2}t^2\right)=0$$

$$3t^2-4at=0,\quad t=0,\ \frac{4}{3}a$$

よって，共通接線 l_1，l_2 の方程式は，①より，

$$y=0,\quad y=\frac{4}{3}ax-\frac{8}{9}a^2\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　②と x 軸との交点は，$\dfrac{4}{3}ax-\dfrac{8}{9}a^2=0$ から，$x=\dfrac{2}{3}a$

すると，l_1，l_2 と C で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{4}{3}a}x^2\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a-\frac{2}{3}a\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a\right)^2=\frac{1}{6}\Big[x^3\Big]_0^{\frac{4}{3}a}-\frac{8}{27}a^3$$

$$=\frac{32}{81}a^3-\frac{8}{27}a^3=\frac{8}{81}a^3$$

［解 説］

微積分の頻出問題です。形式を変えて，センター試験にそのまま出題されても，違和感はありません。

$\boxed{3a}$ 問題のページへ

方程式 $x^4+(8-2p)x^2+p=0$ ……①に対し，$x^2=t$ とおくと，

$$t^2+(8-2p)t+p=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①が相異なる 4 個の実数解をもつ条件は，②が異なる 2 つの正の解をもつことに対応する。この解を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$D/4=(4-p)^2-p>0 \cdots\cdots\cdots ③$$

$$\alpha+\beta=-(8-2p)>0 \cdots\cdots\cdots ④,\ \alpha\beta=p>0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③より，$p^2-9p+16>0$ となり，$p<\frac{9-\sqrt{17}}{2}$，$\frac{9+\sqrt{17}}{2}<p$

④より $p>4$ となり，③④⑤をまとめると，$p>\frac{9+\sqrt{17}}{2}$ ………⑥

このとき，①の解は，$\pm\sqrt{\alpha}$，$\pm\sqrt{\beta}$ となり，$-\sqrt{\beta}$，$-\sqrt{\alpha}$，$\sqrt{\alpha}$，$\sqrt{\beta}$ が等差数列をなすことより，

$$\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=2\sqrt{\alpha},\ \sqrt{\beta}=3\sqrt{\alpha}$$

よって，$\beta=9\alpha$ となり，④⑤から，

$$\alpha+9\alpha=-(8-2p) \cdots\cdots\cdots ⑦,\ \alpha\cdot 9\alpha=p \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑦⑧より，$10\alpha=-8+18\alpha^2$，$9\alpha^2-5\alpha-4=0$，$(9\alpha+4)(\alpha-1)=0$

$\alpha>0$ より $\alpha=1$ となり，⑧から $p=9$ である。

なお，この値は⑥を満たしている。

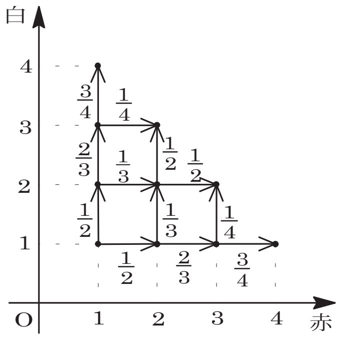
[解 説]

複 2 次方程式の解の条件についての問題です。なお，⑦⑧から α を消去して p の 2 次方程式をつくると，因数分解に時間がかかってしまいます。

3b

問題のページへ

(1)　赤玉と白玉の個数を，(赤，白)の順に記し，座標平面上の格子点を対応させると，右図のようになり，



$$p_3(1)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$p_3(2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$p_3(3)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$p_3(4)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

なお, $m\geqq 5$ のとき，$p_3(m)=0$ である。

(2)　まず，$m\geqq N+2$ のとき，明らかに $p_N(m)=0$ である。

ここで，$1\leqq m\leqq N+1$ のとき，$p_N(m)=\dfrac{1}{N+1}$ であることを, N について数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$N=1$ のとき　$p_1(1)=p_1(2)=\dfrac{1}{2}$ より，成立している。

(ii)　$N=k$ のとき　$p_k(m)=\dfrac{1}{k+1}$　$(1\leqq m\leqq k+1)$ と仮定する。

$N=k+1$ のとき $m=1$ となるのは, (赤，白)$=(1,\ k+1)$ で白を取り出す場合より,

$$p_{k+1}(1)=\frac{k+1}{k+2}p_k(1)=\frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+2}$$

$N=k+1$ のとき $m=l$ $(2\leqq l\leqq k+1)$ となるのは，(赤，白)$=(l,\ k+2-l)$ で白を取り出すか, (赤，白)$=(l-1,\ k+3-l)$ で赤を取り出す場合より,

$$p_{k+1}(l)=\frac{k+2-l}{k+2}p_k(l)+\frac{l-1}{k+2}p_k(l-1)=\frac{k+2-l}{k+2}\cdot\frac{1}{k+1}+\frac{l-1}{k+2}\cdot\frac{1}{k+1}$$

$$=\frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+2}$$

$N=k+1$ のとき $m=k+2$ となるのは，(赤，白)$=(k+1,\ 1)$ で赤を取り出す場合より,

$$p_{k+1}(k+2)=\frac{k+1}{k+2}p_k(k+1)=\frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+2}$$

以上より，$p_{k+1}(m)=\dfrac{1}{k+2}$　$(1\leqq m\leqq k+2)$ である。

(i)(ii)より，$p_N(m)=\dfrac{1}{N+1}$　$(1\leqq m\leqq N+1)$

［解 説］

状態の推移を座標平面上の点を対応させて考えました。(2)の証明は，上の図を見ながら行いましたが，それでも注意力がかなり要求されます。