

1

解答解説のページへ

2行2列の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。 a, b, d が実数で $c=0$ である行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ を上三角行列という。また、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

- (1) $A^2 = E$ を満たす上三角行列 A をすべて求めよ。
- (2) $A^3 = E$ を満たす上三角行列 A をすべて求めよ。
- (3) 上三角行列 A が $A^4 = E$ を満たすとき、 $A^2 = E$ となることを示せ。

2

解答解説のページへ

- (1) 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ のグラフをかけ。
- (2) 方程式 $f(x) = a$ (a は実数) が相異なる 3 つの実数解 $\alpha < \beta < \gamma$ をもつとする。
 $l = \gamma - \alpha$ を β のみを用いて表せ。
- (3) a が(2)の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

数列 $\{a_n\}$ ($a_n > 0$) を次の規則によって定める。

$$a_1 = 1, \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

曲線 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ と、 x 軸および 2 直線 $x = a_n$, $x = a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} V_n$ を求めよ。

4a

解答解説のページへ

原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円に、円外の点 $P(x_0, y_0)$ から 2 本の接線を引く。

- (1) 2 つの接点の中点を Q とするとき、点 Q の座標 (x_1, y_1) を点 P の座標 (x_0, y_0) を用いて表せ。また $OP \cdot OQ = 1$ であることを示せ。
- (2) 点 P が直線 $x + y = 2$ 上を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ。

4b

解答解説のページへ

袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し, 出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後, 赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

- (1) 連比 $p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4)$ を求めよ。
- (2) 一般の N に対し $p_N(m)$ ($1 \leq m \leq N+1$) を求めよ。

1

問題のページへ

$$(1) A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} \text{となり, } A^2 = E \text{ より,}$$

$$a^2 = 1, b(a+d) = 0, d^2 = 1$$

よって, $(a, d) = \pm(1, 1)$ のとき $b = 0$, $(a, d) = \pm(1, -1)$ のとき b は任意より,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b \text{ は任意の実数})$$

$$(2) A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ad+d^2) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} \text{となり, } A^3 = E \text{ より,}$$

$$a^3 = 1, b(a^2+ad+d^2) = 0, d^3 = 1$$

よって, $(a, d) = (1, 1)$ から $b = 0$ となり, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

$$(3) A^4 = \begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ad+d^2) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & b(a^3+a^2d+ad^2+d^3) \\ 0 & d^4 \end{pmatrix}$$

さて, $A^4 = E$ より,

$$a^4 = 1, b(a^3+a^2d+ad^2+d^3) = 0, d^4 = 1$$

すると, $(a^2, d^2) = (1, 1)$ から $b(a+d+a+d) = 0$ となり, $b(a+d) = 0$

よって, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ となる。

[解説]

ハミルトン・ケーリーの定理の利用も考えられますが, 三角行列の累乗は複雑な形にならないという記憶があれば, 上記の成分計算が最も簡明でしょう。

2

問題のページへ

(1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ より,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

すると、 $f(x)$ の値の変化は右表のようになる。

また、 $f(x) = (2x+1)(x-1)^2$ から、 $y = f(x)$

のグラフと x 軸との共有点は、 $x = -\frac{1}{2}, 1$ である。

よって、 $y = f(x)$ のグラフは右図のようになる。

(2) (1)より、方程式 $f(x) = a$ は、 $0 < a < 1$ のとき 3 つの実数

解 $\alpha < \beta < \gamma$ をもち、

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2} \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より、} \alpha + \gamma = \frac{3}{2} - \beta$$

$$\textcircled{2} \text{に代入して、} \alpha\gamma = -\beta(\alpha + \gamma) = -\beta\left(\frac{3}{2} - \beta\right)$$

さて、 $l = \gamma - \alpha$ より、

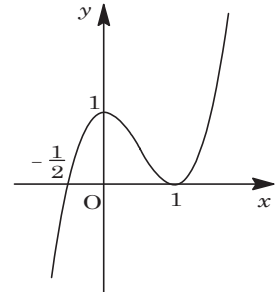
$$l^2 = (\gamma - \alpha)^2 = (\alpha + \gamma)^2 - 4\alpha\gamma = \left(\frac{3}{2} - \beta\right)^2 + 4\beta\left(\frac{3}{2} - \beta\right) = -3\beta^2 + 3\beta + \frac{9}{4}$$

$$\text{よって、} l = \sqrt{-3\beta^2 + 3\beta + \frac{9}{4}}$$

(3) (2)より、 $l = \sqrt{-3\left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + 3}$ となり、 $0 < \beta < 1$ から、

$$\frac{3}{2} < l \leq \sqrt{3}$$

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗



[解説]

解 α, γ と β の関係をとらえるために、解と係数の関係に着目することがポイントとなっています。見かけよりスパイスの効いている 1 題です。

3

問題のページへ

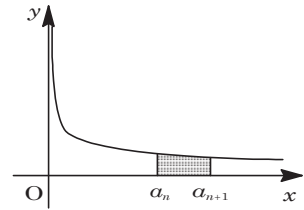
まず, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{a_n}^{a_{n+1}} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} [x^{\frac{2}{3}}]_{a_n}^{a_{n+1}} = \frac{3}{2} (a_{n+1}^{\frac{2}{3}} - a_n^{\frac{2}{3}})$ なので, 条件より,

$$\frac{3}{2} (a_{n+1}^{\frac{2}{3}} - a_n^{\frac{2}{3}}) = 1, \quad a_{n+1}^{\frac{2}{3}} - a_n^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

すると, $a_1 = 1$ から, $a_n^{\frac{2}{3}} = a_1^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{1}{3}(2n+1)$

よって, $a_n = \left\{ \frac{1}{3}(2n+1) \right\}^{\frac{3}{2}}$

さて, 曲線 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ と, x 軸, 2 直線 $x = a_n$, $x = a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 V_n は,



$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx = \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} x^{-\frac{2}{3}} dx \\ &= 3\pi \left[x^{\frac{1}{3}} \right]_{a_n}^{a_{n+1}} = 3\pi (a_{n+1}^{\frac{1}{3}} - a_n^{\frac{1}{3}}) \end{aligned}$$

ここで, $a_n^{\frac{1}{3}} = \left[\left\{ \frac{1}{3}(2n+1) \right\}^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = \left\{ \frac{1}{3}(2n+1) \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}(2n+1)}$ より,

$$V_n = 3\pi \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}(2n+3)} - \sqrt{\frac{1}{3}(2n+1)} \right\} = \sqrt{3}\pi (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1})$$

すると, $\sqrt{n} V_n = \sqrt{3}\pi \sqrt{n} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}) = \sqrt{3}\pi \cdot \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}$ から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} V_n = \sqrt{3}\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2 + \frac{3}{n}} + \sqrt{2 + \frac{1}{n}}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \pi = \frac{\sqrt{6}}{2} \pi$$

[解説]

積分を計算して, 数列 $\{a_n^{\frac{2}{3}}\}$ が等差数列であることを見抜けば, 後半は計算練習にすぎません。

4a

問題のページへ

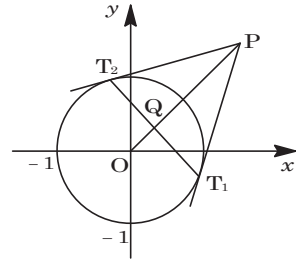
(1) 2 つの接点を $T_1(s_1, t_1)$, $T_2(s_2, t_2)$ とおくと, 接線の方程式はそれぞれ,

$$s_1x + t_1y = 1, \quad s_2x + t_2y = 1$$

点 $P(x_0, y_0)$ を通ることより,

$$s_1x_0 + t_1y_0 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad s_2x_0 + t_2y_0 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで, 方程式 $x_0x + y_0y = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$ は直線を表し, ①から $T_1(s_1, t_1)$, ②から $T_2(s_2, t_2)$ を通過することがわかる。すなわち, ③は直線 T_1T_2 を表す。



さて, 直線 T_1T_2 の法線ベクトルは, $\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0)$ となり, 2 直線 OP , T_1T_2 は直交する。言い換えると, 2 点 T_1, T_2 の中点 Q は 2 直線 OP , T_1T_2 の交点である。

ここで, 直線 OP は, k を実数として,

$$(x, y) = k(x_0, y_0), \quad y_0x - x_0y = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{4} \text{より, } x = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad y = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \text{ となるので, } Q\left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}\right)$$

$$\begin{aligned} OP \cdot OQ &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot \sqrt{\frac{x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} + \frac{y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}} \\ &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x_0^2 + y_0^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$(2) \quad Q(x_1, y_1) \text{ より, } x_1 = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad y_1 = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

(1)から $OP \cdot OQ = 1$ なので, $(x_0^2 + y_0^2)(x_1^2 + y_1^2) = 1$ となり, ⑤より,

$$x_0 = x_1(x_0^2 + y_0^2) = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_0 = y_1(x_0^2 + y_0^2) = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

さて, 条件より, $x_0 + y_0 = 2$ なので, ⑥より $\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} = 2$

$$2x_1^2 + 2y_1^2 - x_1 - y_1 = 0, \quad (x_1, y_1) \neq (0, 0)$$

すると, $(x_1 - \frac{1}{4})^2 + (y_1 - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}$ から, 点 Q の軌跡は円 $(x - \frac{1}{4})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}$

である。ただし, 原点は除く。

[解説]

有名な頻出問題です。なお, 点 Q が 2 直線 OP , T_1T_2 の交点であることは対称性から明らかですが, ここでは二等辺三角形の頂点から底辺に引いた垂線の足が, 底辺の中点であることを用いています。

4b

問題のページへ

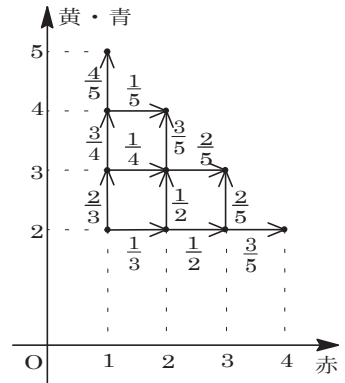
(1) 赤玉, 黄玉または青玉の個数を, (赤, 黄・青)の順に記し, 座標平面上の格子点を対応させると, 右図のようになり,

$$p_3(1) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$p_3(2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$p_3(3) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$p_3(4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$$



したがって,

$$p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4) = 4 : 3 : 2 : 1$$

(2) $p_N(1) : p_N(2) : \dots : p_N(m) : \dots : p_N(N+1) = N+1 : N : \dots : N-m+2 : \dots : 1$

と, (1)より推測できるので, $1 \leq m \leq N+1$ のとき,

$$p_N(m) = \frac{N-m+2}{1+2+\dots+(N+1)} = \frac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}$$

以下, この推測の正しいことを, 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $N=1$ のとき $p_1(1) = \frac{2}{3}$, $p_1(2) = \frac{1}{3}$ より, 成立している。

(ii) $N=k$ のとき $p_k(m) = \frac{2(k-m+2)}{(k+1)(k+2)}$ ($1 \leq m \leq k+1$)と仮定する。

$N=k+1$ のとき $m=1$ となるのは, (赤, 黄・青) = $(1, k+2)$ で黄または青を取り出す場合より,

$$\begin{aligned} p_{k+1}(1) &= \frac{k+2}{k+3} p_k(1) = \frac{k+2}{k+3} \cdot \frac{2(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{2(k+2)}{(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{2\{(k+1)-1+2\}}{(k+2)(k+3)} \end{aligned}$$

$N=k+1$ のとき $m=l$ ($2 \leq l \leq k+1$)となるのは, (赤, 黄・青) = $(l, k+3-l)$ で黄または青を取り出すか, (赤, 黄・青) = $(l-1, k+4-l)$ で赤を取り出す場合より,

$$\begin{aligned} p_{k+1}(l) &= \frac{k+3-l}{k+3} p_k(l) + \frac{l-1}{k+3} p_k(l-1) \\ &= \frac{k+3-l}{k+3} \cdot \frac{2(k-l+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{l-1}{k+3} \cdot \frac{2(k-l+3)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{2(k-l+3)}{k+3} \cdot \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2(k-l+3)}{(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{2\{(k+1)-l+2\}}{(k+2)(k+3)} \end{aligned}$$

$N=k+1$ のとき $m=k+2$ となるのは, (赤, 黄・青) = $(k+1, 2)$ で赤を取り出す場

合より,

$$\begin{aligned} p_{k+1}(k+2) &= \frac{k+1}{k+3} p_k(k+1) = \frac{k+1}{k+3} \cdot \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{2\{(k+1)-(k+2)+2\}}{(k+2)(k+3)} \end{aligned}$$

以上より, $p_{k+1}(m) = \frac{2\{(k+1)-m+2\}}{(k+2)(k+3)}$ ($1 \leq m \leq k+2$) である。

$$(i)(ii) \text{より, } p_N(m) = \frac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)} \quad (1 \leq m \leq N+1)$$

[解説]

文系の類題に, さらに一ひねりが加えられています。状態の推移を座標平面上の点に対応させて考え, (2)の証明も図を見ながら行いました。しかし, それでも注意力がかなり要求される難問です。