1

解答解説のページへ

2 つの円 $x^2+(y-2)^2=9$ と $(x-4)^2+(y+4)^2=1$ に外接し，直線 $x=6$ に接する円を求めよ。ただし，2 つの円がただ 1 点を共有し，互いに外部にあるとき，外接するという。

2

解答解説のページへ

次の不等式の表す領域を D とする。

$$(x-2)^2+|2x+3y-1|\leqq 4$$

(1) D の概形を描き，その面積を求めよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値およびそれらの値をとる点の座標を求めよ。

$\boxed{3a}$

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$3x+2y \leqq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$3x+2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

3b

解答解説のページへ

袋 A の中に赤玉と白玉がそれぞれ 2 つ入っていることと，袋 B の中に赤玉 3 つと白玉 2 つが入っていることが分かっている。

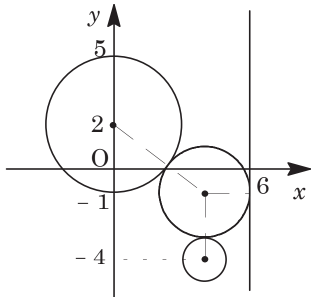
(1)　袋 B から 2 つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ。

(2)　袋 A から 1 つの玉を取り出し，そのあと袋 B から 2 つの玉を取り出す。その 3 つの玉のうち赤玉が 2 つである確率を求めよ。

(3)　袋 A から 1 つの玉を取り出したあとで，2 つの玉を袋 A から取り出すかあるいは 2 つの玉を袋 B から取り出すかのどちらかを選択できるとする。できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ。

1

問題のページへ



まず，求める円 C の半径を r とすると，条件より，直線 $x=6$ に左側から接することから，k を定数として，中心の座標を $(6-r,\ k)$ とおくことができる。

すると，C の方程式は，

$$(x-6+r)^2+(y-k)^2=r^2$$

さて，C は，中心 $(0,\ 2)$，半径 3 の円 $x^2+(y-2)^2=9$ に外接することより，

$$\sqrt{(6-r)^2+(k-2)^2}=3+r\cdots\cdots\cdots①$$

また，C は，中心 $(4,\ -4)$，半径 1 の円 $(x-4)^2+(y+4)^2=1$ に外接することより，

$$\sqrt{(6-r-4)^2+(k+4)^2}=1+r\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$(6-r)^2+(k-2)^2=(3+r)^2$，$18r=k^2-4k+31\cdots\cdots\cdots③$

②より，$(2-r)^2+(k+4)^2=(1+r)^2$，$6r=k^2+8k+19\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$k^2-4k+31=3(k^2+8k+19)$ となり，まとめて，$k^2+14k+13=0$

$$(k+1)(k+13)=0,\ k=-1,\ -13$$

④より，$k=-1$ のとき $r=2$，$k=-13$ のとき $r=14$

以上より，求める円 C は，

$$(x-4)^2+(y+1)^2=4,\ (x+8)^2+(y+13)^2=196$$

[解 説]

円と直線および 2 円の位置関係についての基本問題です。

2

問題のページへ

(1)　$D:(x-2)^2+|2x+3y-1|\leqq 4$ ……①に対して,

(i)　$2x+3y-1\geqq 0$ のとき

①は, $(x-2)^2+(2x+3y-1)\leqq 4$ となり, $x^2-2x+3y\leqq 1$

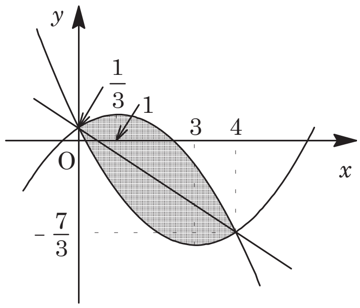
$y\leqq -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$, $y\leqq -\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}$

(ii)　$2x+3y-1<0$ のとき

①は, $(x-2)^2-(2x+3y-1)\leqq 4$ となり,

$x^2-6x-3y\leqq -1$

$y\geqq \frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{3}$, $y\geqq \frac{1}{3}(x-3)^2-\frac{8}{3}$



よって, 領域 D を図示すると, 右図の網点部のようになる。ただし, 境界は領域に含む。

ここで, 領域 D の面積を S とおくと,

$$S=\int_0^4\left\{\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{3}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^4\left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x\right)dx=\left[-\frac{2}{9}x^3+\frac{4}{3}x^2\right]_0^4=-\frac{2}{9}\cdot 64+\frac{4}{3}\cdot 16=\frac{64}{9}$$

(2)　$x+y=k$ とおくと, $y=-x+k$ ………②

さて, 直線②と領域 D の境界線 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ との共有点は,

$-x+k=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$, $x^2-5x+3k-1=0$ ………③

接する条件は, $D=25-4(3k-1)=0$, $k=\frac{29}{12}$

このとき, 接点の x 座標は③の重解より, $x=\frac{5}{2}$ となり, $0<x<4$ を満たす。

②より, $y=-\frac{5}{2}+\frac{29}{12}=-\frac{1}{12}$ となり, 点 $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{12}\right)$ において最大値 $\frac{29}{12}$ をとる。

また, 直線②と領域 D の境界線 $y=\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{3}$ との共有点は,

$-x+k=\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{1}{3}$, $x^2-3x-3k+1=0$ ………③

接する条件は, $D=9-4(-3k+1)=0$, $k=-\frac{5}{12}$

このとき, 接点の x 座標は③の重解より, $x=\frac{3}{2}$ となり, $0<x<4$ を満たす。

②より, $y=-\frac{3}{2}-\frac{5}{12}=-\frac{23}{12}$ となり, 点 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{23}{12}\right)$ において最小値 $-\frac{5}{12}$ をとる。

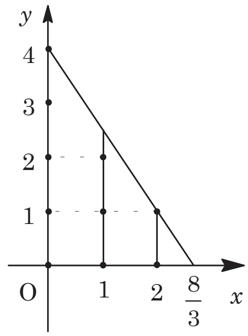
［解 説］

領域の最大・最小問題への応用です。正確な計算がすべてです。

3a

問題のページへ

(1)　不等式$3x+2y\leqq 8$を満たす 0 以上の整数の組$(x,\ y)$の個数を, xを固定して数える。



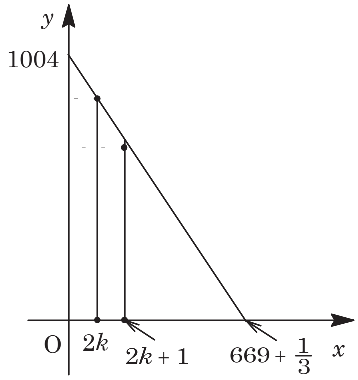
右図より，$x=0$上では $0\leqq y\leqq 4$ より 5 個，$x=1$上では$0\leqq y\leqq 2$より 3 個，$x=2$上では$0\leqq y\leqq 1$より 2 個ある。

すると，整数の組$(x,\ y)$の個数は，

$$5+3+2=10$$

(2)　(1)と同様に，不等式$3x+2y\leqq 2008$を満たす 0 以上の整数の組$(x,\ y)$の個数を, xを固定して数える。

(i)　$x=2k\ (0\leqq k\leqq 334)$のとき



境界線$3x+2y=2008$との交点は，

$$y=\frac{1}{2}(2008-3\cdot 2k)=1004-3k$$

よって，0 以上の整数の組$(x,\ y)$は，直線$x=2k$上で，$0\leqq y\leqq 1004-3k$より，$1005-3k$個ある。

(ii)　$x=2k+1\ (0\leqq k\leqq 334)$のとき

境界線$3x+2y=2008$との交点は，

$$y=\frac{1}{2}\{2008-3(2k+1)\}=1004-3k-\frac{3}{2}$$

よって，0 以上の整数の組$(x,\ y)$は，直線$x=2k+1$上で，$0\leqq y\leqq 1004-3k-2$より，$1003-3k$個ある。

(i)(ii)より，求める整数の組$(x,\ y)$の個数Nは，

$$N=\sum_{k=0}^{334}(1005-3k)+\sum_{k=0}^{334}(1003-3k)=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)$$

$$=2008\times 335-6\times\frac{1}{2}\cdot 334\cdot 335=337010$$

［解 説］

格子点の個数を数える有名問題です。(2)では場合分けが必要なので，慎重な処理が必要です。

3b

問題のページへ

(1)　赤玉 3 個，白玉 2 個が入っている袋 B から 2 個の玉を取り出すとき，${}_5C_2$ 通りが同様に確からしいとする。

すると，取り出された玉が，赤 0 個，白 2 個の確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$，赤 1 個，白 1 個の確率は $\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{6}{10}$，赤 2 個，白 0 個の確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$ となり，赤玉の個数の期待値は，

$$0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$$

(2)　赤玉 2 個，白玉 2 個が入っている袋 A から 1 個の玉を取り出し，そのあと袋 B から 2 個の玉を取り出す。このとき，赤 2 個となる確率は，

(i)　袋 A から赤玉を取り出したとき　$\dfrac{2}{4}\times\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{10}$

(ii)　袋 A から白玉を取り出したとき　$\dfrac{2}{4}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{20}$

(i)(ii)より，$\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{20}=\dfrac{9}{20}$

(3)　最初に袋 A から取り出した玉の色で場合分けをする。

(i)　最初に袋 A から赤玉を取り出したとき

(a)　次も袋 A（赤 1 個，白 2 個）から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は，

$$0\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}+1\times\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_3C_2}=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

(b)　次に袋 B から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は，(1)より $\dfrac{6}{5}$ である。

(a) (b)より，$\dfrac{2}{3}<\dfrac{6}{5}$ なので，次は袋 B から 2 個取り出すことを選択する。

このときの赤玉の個数の期待値は，

$$1\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{4}\times\frac{6}{10}+3\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{11}{10}$$

(ii)　最初に袋 A から白玉を取り出したとき

(a)　次も袋 A（赤 2 個，白 1 個）から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は，

$$1\times\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}+2\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

(b)　次に袋 B から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は，(1)より $\dfrac{6}{5}$ である。

(a) (b)より，$\dfrac{4}{3}>\dfrac{6}{5}$ なので，次は袋 A から 2 個取り出すことを選択する。

このときの赤玉の個数の期待値は，

$$1\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(i)(ii)より，できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値は，

$$\frac{11}{10}+\frac{2}{3}=\frac{53}{30}$$

［解 説］

期待値をもとに有利・不利を判断する問題です。誘導はていねいですが，焦ると混乱してしまいます。