1

解答解説のページへ

空間のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が，条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{6}$$

を満たしているとする。ただし，a, b は正の数とする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 三角形 OAB の面積 S を求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ。

2

解答解説のページへ

放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ と円 $(x-b)^2+(y-1)^2=1$ $(b>0)$ が，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で接しているとする。ただし，$0<p<b$ とする。この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき，$\angle\mathrm{PQR}=120^\circ$ であるとする。ここで，放物線と円が点 P で接するとは，P が放物線と円の共有点であり，かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1)　$a,\ b$ の値を求めよ。

(2)　点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸，および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1)　$p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2)　$p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3)　$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(a,\ b,\ 0)$について，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}$より，

$$a^2+b^2=1\ \cdots\cdots\cdots①,\quad a=\frac{1}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b^2=\dfrac{8}{9}$となり，$b>0$から$b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(2) △OAB の面積Sは，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\times1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(p,\ q,\ r)$とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{5}{6}$より，

$$p^2+q^2+r^2=1\ \cdots\cdots\cdots③,\quad p=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots④,\quad \frac{1}{3}p+\frac{2\sqrt{2}}{3}q=\frac{5}{6}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}q=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

③に代入して，$r^2=\dfrac{1}{4}$，$r=\pm\dfrac{1}{2}$

すると，四面体 OABC の体積Vは，△OAB がxy平面上にあることより，

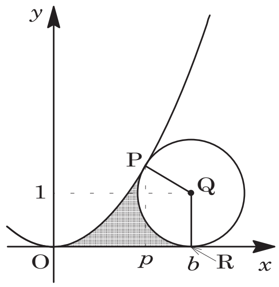
$$V=\frac{1}{3}S\cdot|r|=\frac{\sqrt{2}}{18}$$

［解 説］

空間ベクトルの基本問題です。底面がxy平面上にあるため，構図は単純です。

2

問題のページへ



(1)　まず，条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=1$，$\angle\mathrm{PQR}=120°$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(\sqrt{3},\ -1)$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，

$$(b,\ 1)=(p,\ ap^2)+\frac{1}{2}(\sqrt{3},\ -1)$$

$$b=p+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots①,\ 1=ap^2-\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

また，$y=ax^2$ より $y'=2ax$ となり，$\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ における接線の方向ベクトル $\vec{u}$ は，$\vec{u}=(1,\ 2ap)$ と表せ，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ から，

$$\sqrt{3}-2ap=0\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}p$，$p=\sqrt{3}$ となり，$a=\frac{\sqrt{3}}{2p}=\frac{1}{2}$

①に代入して，$b=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

(2)　(1)より，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$，$\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3},\ 1\right)$，$\mathrm{R}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3},\ 0\right)$となり，求める網点部の面積 S は，

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}x^2dx+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)-\pi\cdot 1^2\cdot\frac{120}{360}$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{3}}+\frac{5}{8}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi=\frac{9}{8}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi$$

［解　説］

(1)では，文字の値を決定するのに，いろいろな方針が考えられます。上の解は，与えられた条件から決定している $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に注目し，そこを出発点として計算を進めたものです。

3

問題のページへ

(1)　さいころを 2 回投げるとき，出る目と出る目の積の一の位の対応をまとめると，右表のようになる。

2回 \ 1回	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

これより，$p_2(0)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，$p_2(1)=\dfrac{1}{36}$，$p_2(2)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ である。

(2)　さいころを $n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 1 となるのは，次の 2 つの場合である。

(i)　n 回までの積の一の位が 1 で，$n+1$ 回目が 1 のとき

(ii)　n 回までの積の一の位が 7 で，$n+1$ 回目が 3 のとき

(i)(ii)より，$p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{6}p_n(7)$ ………①

(3)　$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 3 となるのは，n 回までの積の一の位が 1 で $n+1$ 回目が 3, n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 1 のときであり，

$$p_{n+1}(3)=\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(3) \text{ ………②}$$

$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 7 となるのは，n 回までの積の一の位が 7 で $n+1$ 回目が 1, n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 3 のときであり，

$$p_{n+1}(7)=\frac{1}{6}p_n(7)+\frac{1}{6}p_n(9) \text{ ………③}$$

$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 9 となるのは，n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 3, n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 1 のときであり，

$$p_{n+1}(9)=\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(9) \text{ ………④}$$

①＋②＋③＋④より，

$$p_{n+1}(1)+p_{n+1}(3)+p_{n+1}(7)+p_{n+1}(9)=\frac{1}{3}\{p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)\}$$

ここで，$p_1(1)=p_1(3)=\dfrac{1}{6}$，$p_1(7)=p_1(9)=0$ より，

$$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+0+0\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解 説］

センター試験に向かうときと同様に，まず一覧表を作成した方がミスが少なくなります。なお，(3)は(2)と同様に考えた解法です。