1

解答解説のページへ

$a>0,\ b>0$ とする。点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円が，双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 2 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$，$\mathrm{C}(-s,\ t)$ で接しているとする。ただし，$s>0$ とする。ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1) r, s, t を，a と b を用いて表せ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta) \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で定める。

(1)　導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2)　$g(\theta)$ を求めよ。

(3)　$y=g(\theta)$ のグラフをかけ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

行列 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ に対して，座標空間の点 P_n の座標 $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$(a_1,\ b_1,\ c_1)=(1,\ 0,\ 0)$，

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix},\quad c_{n+1}=c_n+\sqrt{a_nb_n}$$

で定める。

(1)　A^3 を求めよ。

(2)　点 P_2，P_3，P_4 の座標を求めよ。

(3)　点 P_n の座標を求めよ。

4a

解答解説のページへ

さいころを投げると, 1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) 投げるとき，出る目の積の一の位が j ($j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$) となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

(4) $p_n(5)$ を求めよ。

4b

解答解説のページへ

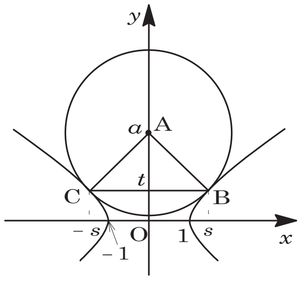
x, y を正の整数とする。

(1)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組$(x,\ y)$をすべて求めよ。

(2)　p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす組$(x,\ y)$のうち，$2x+3y$ を最小にする$(x,\ y)$を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s,\ t-a)$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=r$ なので，

$$s^2+(t-a)^2=r^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\mathrm{B}(s,\ t)$ は双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあり，

$$s^2-\frac{t^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots ②$$

さらに, B における接線の方程式は,

$$sx-\frac{ty}{b^2}=1,\ sb^2x-ty=b^2$$

すると，接線の法線ベクトル $\vec{n}$ は，$\vec{n}=(sb^2,\ -t)$ となり，$\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，

$$sb^2(t-a)+ts=0,\ (b^2+1)t=ab^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

③より，$t=\dfrac{ab^2}{b^2+1}$ となり，②に代入すると, $s>0$ から,

$$s^2=1+\frac{1}{b^2}\left(\frac{ab^2}{b^2+1}\right)^2=\frac{b^4+(a^2+2)b^2+1}{(b^2+1)^2},\quad s=\frac{\sqrt{b^4+(a^2+2)b^2+1}}{b^2+1}$$

さらに，①に代入すると，

$$r^2=\frac{b^4+(a^2+2)b^2+1}{(b^2+1)^2}+\left(\frac{ab^2}{b^2+1}-a\right)^2=\frac{(b^2+1)(a^2+b^2+1)}{(b^2+1)^2}=\frac{a^2+b^2+1}{b^2+1}$$

$r>0$ より，$r=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+1}{b^2+1}} \cdots\cdots\cdots ④$

(2)　△ABC が正三角形となる条件は，$r=2s$ から $r^2=4s^2$ となり，

$$\frac{a^2+b^2+1}{b^2+1}=4\cdot\frac{b^4+(a^2+2)b^2+1}{(b^2+1)^2}$$

変形すると，$(b^2+1)\{a^2+(b^2+1)\}=4\{(b^2+1)^2+a^2b^2\}$ から，

$$3(b^2+1)^2+3a^2b^2-a^2=0,\ (3b^2-1)a^2=-3(b^2+1)^2 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤を満たす $a^2>0$ が存在する b の条件は, $b>0$ から,

$$3b^2-1<0,\ 0<b<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

このとき，⑤を満たす a が存在し，④から r も存在する。

［解 説］

双曲線と円の位置関係に関する問題ですが，計算量が半端ではありません。もっとも，これは 2 次曲線の問題の特徴でしょうが。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ ……①より，$f'(x)=\sqrt{1-x^2}$

また，$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta)$ ……②より，

$$g'(\theta)=-f'(\cos\theta)\sin\theta-f'(\sin\theta)\cos\theta$$
$$=-\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\sin\theta-\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta=-\sin\theta|\sin\theta|-\cos\theta|\cos\theta|$$

(2)　①より，$f(-1)=0$，$f(0)=\frac{\pi}{4}$，$f(1)=\frac{\pi}{2}$ となり，②から，

$$g(0)=f(1)-f(0)=\frac{\pi}{4},\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)-f(1)=-\frac{\pi}{4}$$
$$g(\pi)=f(-1)-f(0)=-\frac{\pi}{4},\ g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f(0)-f(-1)=\frac{\pi}{4}$$

(i)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$g'(\theta)=-\sin^2\theta-\cos^2\theta=-1,\ g(\theta)=-\theta+C_1$$

ここで，$g(0)=\frac{\pi}{4}$ から $C_1=\frac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=-\theta+\frac{\pi}{4}$

(ii)　$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

$$g'(\theta)=-\sin^2\theta+\cos^2\theta=\cos2\theta,\ g(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta+C_2$$

ここで，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ から $C_2=-\frac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{\pi}{4}$

(iii)　$\pi\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ のとき

$$g'(\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ g(\theta)=\theta+C_3$$

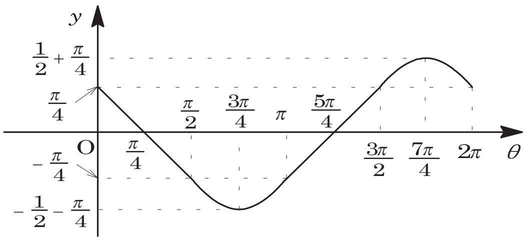
ここで，$g(\pi)=-\frac{\pi}{4}$ から $C_3=-\frac{5\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=\theta-\frac{5\pi}{4}$

(iv)　$\frac{3\pi}{2}\leqq\theta\leqq2\pi$ のとき

$$g'(\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta=-\cos2\theta,\ g(\theta)=-\frac{1}{2}\sin2\theta+C_4$$

ここで，$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ から $C_4=\frac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=-\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}$

(3)　(2)より，(i)～(iv)の場合をまとめると，$y=g(\theta)$ のグラフは右図のようになる。



［解 説］

合成関数の微分についての興味深い問題です。なお，(2)の $f(0)$，$f(1)$ の値は，四分円，半円の面積をもとに導いています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$より，$A^2=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$$A^3=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(2)　$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$より，$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$……①となり，また$c_1=0$，

$c_{n+1}=c_n+\sqrt{a_nb_n}$……②から，

$$\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ c_2=c_1+\sqrt{a_1b_1}=0$$

$$\begin{pmatrix}a_3\\b_3\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\ c_3=c_2+\sqrt{a_2b_2}=0$$

$$\begin{pmatrix}a_4\\b_4\end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ c_4=c_3+\sqrt{a_3b_3}=\frac{1}{4}$$

よって，$\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{P}_3\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，$\mathrm{P}_4\left(\dfrac{1}{8},\ 0,\ \dfrac{1}{4}\right)$

(3)　(1)より，$2A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$，$(2A)^2=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$，$(2A)^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

これより，帰納的に，n を 3 で割ったとき，割り切れれば$(2A)^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，余りが 1 では$(2A)^n=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$，余りが 2 では$(2A)^n=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$となる。

そこで, kを 0 以上の整数とすると，①より，

(i)　$n=3k+1$のとき

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \sqrt{a_nb_n}=0$$

(ii)　$n=3k+2$のとき

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \sqrt{a_nb_n}=0$$

(iii)　$n=3k+3$のとき

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\ \sqrt{a_nb_n}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

さて，②より，$c_1=0$ なので, $n\geqq 2$ において，

$$c_n=c_1+\sum_{l=1}^{n-1}\sqrt{a_lb_l}=\sum_{l=1}^{n-1}\sqrt{a_lb_l}$$

ここで, (i)～(iii)より，数列$\{\sqrt{a_nb_n}\}$は，

$$0,\ 0,\ \frac{1}{2^2},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2^5},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2^8},\ \cdots\cdots\ ,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2^{3k-1}},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2^{3k+2}},\ \cdots\cdots$$

(i)　$n=3k+1$ のとき

$$c_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{3k-1}}=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k\right\}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}\right\}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

よって，$\mathrm{P}_n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ 0,\ \frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right)$ である。

(ii)　$n=3k+2$ のとき

$$c_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{3k-1}}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}\right\}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

よって，$\mathrm{P}_n\left(0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\right)$ である。

(iii)　$n=3k+3$ のとき

$$c_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{3k-1}}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}\right\}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$$

よって，$\mathrm{P}_n\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}\right)$ である。

［解 説］

(1)と(2)は基本的ですが，(3)では，n を 3 で割った余りで場合分けをするために，難易度はかなり上昇します。具体的に考えながら，計算を進めた方がよいでしょう。

4a

問題のページへ

(1)　さいころを 2 回投げるとき，出る目と出る目の積の一の位の対応をまとめると，右表のようになる。これより，$p_2(0)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，$p_2(1)=\dfrac{1}{36}$，$p_2(2)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ である。

2回 \ 1回	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

(2)　さいころを $n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 1 となるのは，次の場合である。

(i)　n 回までの積の一の位が 1 で，$n+1$ 回目が 1 のとき

(ii)　n 回までの積の一の位が 7 で，$n+1$ 回目が 3 のとき

(i)(ii)より，$p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{6}p_n(7)$ ………①

(3)　$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 3 となるのは，n 回までの積の一の位が 1 で $n+1$ 回目が 3, n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 1 のときであり，

$$p_{n+1}(3)=\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(3)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 7 となるのは，n 回までの積の一の位が 7 で $n+1$ 回目が 1, n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 3 のときであり，

$$p_{n+1}(7)=\frac{1}{6}p_n(7)+\frac{1}{6}p_n(9)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 9 となるのは，n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 3, n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 1 のときであり，

$$p_{n+1}(9)=\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(9)\ \cdots\cdots\cdots ④$$

①＋②＋③＋④より，

$$p_{n+1}(1)+p_{n+1}(3)+p_{n+1}(7)+p_{n+1}(9)=\frac{1}{3}\{p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)\}$$

ここで，$p_1(1)=p_1(3)=\dfrac{1}{6}$，$p_1(7)=p_1(9)=0$ より，

$$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+0+0\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(4)　n 回投げるとき，出る目がすべて奇数となる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ より, (3)から,

$$p_n(5)=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\{p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)\}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解 説］

(3)は(2)と同様に考えた解法です。また, (3)までは文理共通です。

4b

問題のページへ

(1)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ より，$xy-4x-8y=0$ となり，

$$(x-8)(y-4)=32$$

ここで, x, y は整数であり，$x-8>-8$，$y-4>-4$ から, 32 の約数をとり,

$$(x-8,\ y-4)=(1,\ 32),\ (2,\ 16),\ (4,\ 8),\ (8,\ 4),\ (16,\ 2),\ (32,\ 1)$$

$$(x,\ y)=(9,\ 36),\ (10,\ 20),\ (12,\ 12),\ (16,\ 8),\ (24,\ 6),\ (40,\ 5)$$

(2)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ より，$xy-px-2py=0$ となり，

$$(x-2p)(y-p)=2p^2$$

ここで，$x-2p>-2p$，$y-p>-p$ であり, p が 3 以上の素数から,

$$(x-2p,\ y-p)=(1,\ 2p^2),\ (2,\ p^2),\ (p,\ 2p),\ (2p,\ p),$$
$$(p^2,\ 2),\ (2p^2,\ 1)$$

さて，$A=2x+3y-7p=2(x-2p)+3(y-p)$ とおくと, A の値は順に,

$$A=2+6p^2,\ 4+3p^2,\ 8p,\ 7p,\ 2p^2+6,\ 4p^2+3$$

ここで, $p\geqq 3$ を用いると,

$$(2+6p^2)-(4+3p^2)=-2+3p^2>0,\ 2+6p^2>4+3p^2$$

$$8p-7p=p>0,\ 8p>7p$$

$$(2p^2+6)-(4p^2+3)=-2p^2+3<0,\ 4p^2+3>2p^2+6$$

さらに，$(4+3p^2)-(2p^2+6)=p^2-2>0$，$4+3p^2>2p^2+6$ ………①

$$(2p^2+6)-7p=(2p-3)(p-2)>0,\ 2p^2+6>7p\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より, A の最小値は $7p$ であり，このとき，$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p)$ となる。

すると，$2x+3y=A+7p$ から，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ は,

$$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p),\ (x,\ y)=(4p,\ 2p)$$

[解 説]

有名な型の不定方程式です。なお, (2)の大小関係については, 初めはグラフということも考えましたが, 煩雑になりそうなので止めました。そこで, まず似た式どうしの大小を比べ, この予選を通過した式の大小を比べるという方法を採っています。