1　　　　解答解説のページへ

xy 平面上の長方形 ABCD が次の条件(a), (b), (c)を満たしているとする。

(a)　対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する。

(b)　直線 AB の傾きは 2 である。

(c)　A の y 座標は, B, C, D の y 座標より大きい。

このとき, $a>0$, $b>0$ として, 辺 AB の長さを $2\sqrt{5}a$, BC の長さを $2\sqrt{5}b$ とおく。

(1)　A, B, C, D の座標を a, b で表せ。

(2)　長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2 \leqq 100$ に含まれるための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

により定める。

(1) $a,\ b$ は実数とする。$y=ax+b$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点をもつための $a,\ b$ に対する条件を求めよ。

(2) $p,\ q$ は実数で $p>0$ とする。$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつための $p,\ q$ に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ。

3

解答解説のページへ

はじめに, A が赤玉を 1 個, B が白玉を 1 個, C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の硬貨を投げ, 表が出れば A と B の玉を交換し, 裏が出れば B と C の玉を交換する, という操作を考える。この操作を n 回($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれa_n, b_n, c_nとおく。

(1) a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2を求めよ。

(2) a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}をa_n, b_n, c_nで表せ。

(3) n が奇数ならば$a_n=b_n>c_n$が成り立ち, n が偶数ならば$a_n>b_n=c_n$が成り立つことを示せ。

(4) b_nを求めよ。

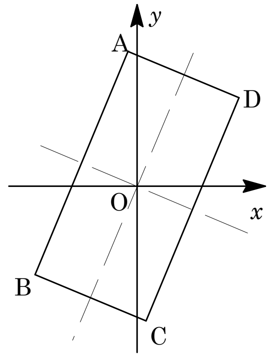
1

問題のページへ

(1)　まず，条件(a)(c)から，頂点の y 座標は，A が最大，C が最小である。

さて，条件(b)より，直線 AB の $\overrightarrow{AB}$ と同じ向きの方向ベクトルの成分は $(-1,\ -2)$ とおくことができ，

$$\overrightarrow{AB}=2\sqrt{5}a\times\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ -2)=-2a(1,\ 2)$$



ここで，$A(p,\ q)$ とすると，

$$\overrightarrow{OB}=(p,\ q)-2a(1,\ 2)=(p-2a,\ q-4a)$$

次に，辺 BC は AB と垂直なので，直線 BC の $\overrightarrow{BC}$ と同じ向きの方向ベクトルの成分は $(2,\ -1)$ とおくことができ，

$$\overrightarrow{BC}=2\sqrt{5}b\times\frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ -1)=2b(2,\ -1)$$

すると，$B(p-2a,\ q-4a)$ より，

$$\overrightarrow{OC}=(p-2a,\ q-4a)+2b(2,\ -1)=(p-2a+4b,\ q-4a-2b)$$

条件(a)から，C は A と原点対称なので，

$$p-2a+4b=-p\cdots\cdots\text{①},\quad q-4a-2b=-q\cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$p=a-2b$，$q=2a+b$ となり，

$$A(a-2b,\ 2a+b),\quad C(-a+2b,\ -2a-b)$$

また，$p-2a=-a-2b$，$q-4a=-2a+b$ であり，D は B と原点対称なので，

$$B(-a-2b,\ -2a+b),\quad D(a+2b,\ 2a-b)$$

(2)　$E(0,\ 5)$ とおくと，E は辺 AD, BC の垂直二等分線 $y=2x$ の上側，辺 AB, DC の垂直二等分線 $y=-\frac{1}{2}x$ の上側にあることより，

$$EA<EB<EC,\quad EA<ED<EC$$

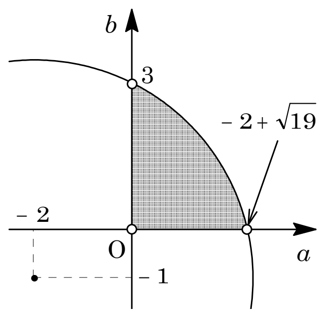
よって，長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2\leqq 100\cdots\cdots$③に含まれる条件は，点 C が領域③に含まれる条件に等しく，$(-a+2b)^2+(-2a-b-5)^2\leqq 100$

$$(-a+2b)^2+(-2a-b)^2-10(-2a-b)+25\leqq 100$$

$$5a^2+5b^2+20a+10b-75\leqq 0$$

$$(a+2)^2+(b+1)^2\leqq 20$$

よって，$a>0$，$b>0$ と合わせて，a，b に対する条件を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，両軸以外の境界線は領域に含む。



［解 説］

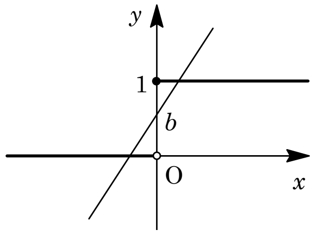
図形の配置が指定されているため，単位ベクトルを利用した解で記しています。

2

問題のページへ

(1)　$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$y=ax+b$ のグラフとちょうど 2 つの交点をもつのは，$x<0$，$x \geqq 0$ で 1 回ずつ交わる場合より，

$$a>0,\ 0<b \leqq 1$$



(2)　$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ ……(＊)に対して，

$$y'=3x^2+12px+9p^2$$
$$=3(x+3p)(x+p)$$

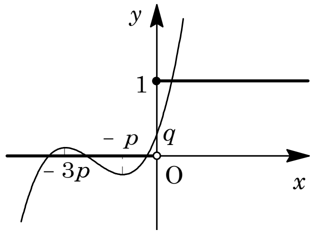
$p>0$ から，関数値の増減は右表のようになり，$x \geqq 0$ では単調に増加する。

x	$\cdots$	$-3p$	$\cdots$	$-p$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	q	$\searrow$	$-4p^3+q$	$\nearrow$

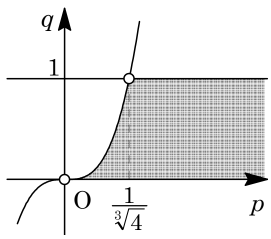
すると，(＊)のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつためには，$x<0$ で 3 回，$x \geqq 0$ で 1 回交わる場合となる。その条件は，$p>0$ のもとで，

$$q>0,\ -4p^3+q<0,\ 0<q \leqq 1$$

まとめると，$p>0$，$q<4p^3$，$0<q \leqq 1$ である。



これを，pq 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，半直線 $q=1\ \left(p>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ 以外の境界線は領域に含まない。



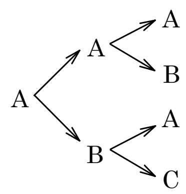
［解 説］

グラフの位置関係の問題ですが，かなり感覚的なものに頼っています。(1)(2)ともに，もう少し詳しく書いた方がよかったかもしれません。

3

問題のページへ

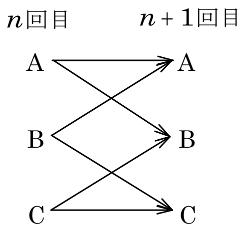
(1) はじめに，A が赤玉を持っていて，題意の操作をしたところ，赤玉は右図のように移動する。その確率は，いずれも $\frac{1}{2}$ なので，



$$a_1 = b_1 = \frac{1}{2},\ c_1 = 0$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},\ b_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\ c_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(2) n 回目の操作後から，$n+1$ 回目の操作後への赤玉の移動は右図のようになり，移動の確率は，いずれも $\frac{1}{2}$ から，



$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots\cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots\cdots ②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots\cdots ③$$

(3) n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$, n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n = 1$ のとき

(1)から，$a_1 = b_1 > c_1$，$a_2 > b_2 = c_2$ となり，成立する。

(ii) $n = k$ のとき

$a_{2k-1} = b_{2k-1} > c_{2k-1}$，$a_{2k} > b_{2k} = c_{2k}$ であると仮定すると，①②③より，

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}b_{2k},\ b_{2k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k},\ c_{2k+1} = \frac{1}{2}b_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k}$$

よって，$a_{2k+1} = b_{2k+1} > c_{2k+1}$ となり，さらに，

$$a_{2k+2} = \frac{1}{2}a_{2k+1} + \frac{1}{2}b_{2k+1},\ b_{2k+2} = \frac{1}{2}a_{2k+1} + \frac{1}{2}c_{2k+1},\ c_{2k+2} = \frac{1}{2}b_{2k+1} + \frac{1}{2}c_{2k+1}$$

よって，$a_{2k+2} > b_{2k+2} = c_{2k+2}$ である。

(i)(ii)より, n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$, n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ である。

(4) $a_n + b_n + c_n = 1$ なので，②から，$b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n)$ となり，

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

よって，$b_n - \frac{1}{3} = \left(b_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ より，$b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

［解 説］

確率と連立漸化式についての有名問題です。当たり前すぎて忘れがちなポイントは，$a_n + b_n + c_n = 1$ です。