1

解答解説のページへ

座標空間に 8 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{P}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{R}(0,\ 1,\ 0)$$

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{C}(1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{D}(0,\ 1,\ 1)$$

をとり, 線分 BC の中点を M とする。線分 RD 上の点を $\mathrm{N}(0,\ 1,\ t)$ とし, 3 点 O, M, N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K, L とする。

(1) K の座標を t で表せ。

(2) 四面体 OKLP の体積を $V(t)$ とする。N が線分 RD 上を R から D まで動くとき, $V(t)$ の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{2}$　　解答解説のページへ

関数 $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，任意の自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの変曲点を求め，グラフの概形をかけ。

(2)　$a>0$ とする。点 $(0,\ a)$ を通る $y=f(x)$ のグラフの接線が 1 本だけ存在するような a の値を求めよ。また，a がその値をとるとき，$y=f(x)$ のグラフ，その接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

はじめに, A が赤玉を 1 個, B が白玉を 1 個, C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の硬貨を投げ, 表が出れば A と B の玉を交換し, 裏が出れば B と C の玉を交換する, という操作を考える。この操作を n 回($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれa_n, b_n, c_nとおく。

(1)　a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2を求めよ。

(2)　a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}をa_n, b_n, c_nで表せ。

(3)　a_n, b_n, c_nを求めよ。

4

解答解説のページへ

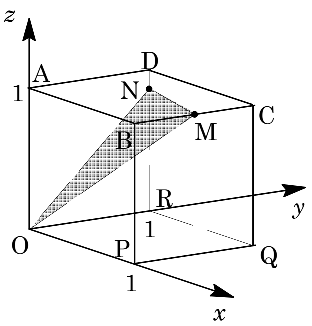
xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ。

(2)　$a,\ b$ は実数で $a\neq 0$ とする。$y=ax^2+bx$ のグラフ上に，点 $(0,\ 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば，無限個存在することを示せ。

1

問題のページへ



(1)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(0,\ 1,\ t)$ で，M は線分 BC の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1\right)=\frac{1}{2}(2,\ 1,\ 2)$$

さて，平面 OMN の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，$\vec{n}$ は $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ に垂直なので，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=b+tc=0\ \cdots\cdots\cdots①$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2a+b+2c=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b=-tc$，$a=\dfrac{t-2}{2}c$

よって，$\vec{n}=\dfrac{c}{2}(t-2,\ -2t,\ 2)$ であることより，平面 OMN の方程式は，

$$(t-2)x-2ty+2z=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，直線 PD は，u をパラメータとして，

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+u\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(1,\ 0,\ 0)+u(-1,\ 1,\ 1)=(1-u,\ u,\ u)\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(t-2)(1-u)-2tu+2u=0$，$(t-2)+(4-3t)u=0$

$0\leqq t\leqq 1$ から $u=\dfrac{2-t}{4-3t}$ となり，④より，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{2-2t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$

よって，平面 OMN と直線 PD の交点 K は，$\mathrm{K}\left(\dfrac{2-2t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$となる。

(2)　平面 OMN と直線 PB : $x=1$，$y=0$ の交点 L の z 座標は，③より，

$$(t-2)+2z=0,\quad z=\frac{2-t}{2}$$

これより，四面体 OKLP の体積 $V(t)$ は，△OPL を底面と考えて，

$$V(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2-t}{2}\right)\frac{2-t}{4-3t}=\frac{(2-t)^2}{12(4-3t)}$$

$$V'(t)=\frac{-2(2-t)(4-3t)+3(2-t)^2}{12(4-3t)^2}=\frac{(2-t)(3t-2)}{12(4-3t)^2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$	$\frac{1}{12}$	↘	$\frac{2}{27}$	↗	$\frac{1}{12}$

これより，$V(t)$ は $t=0$ または $t=1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{12}$ をとり，$t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{2}{27}$ をとる。

［解　説］

交点 K, L の座標を求めるとき，計算を単純にするため，平面の方程式を利用しています。配布された公式集にも載っていることですし。

2　問題のページへ

(1)　$f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ に対して,

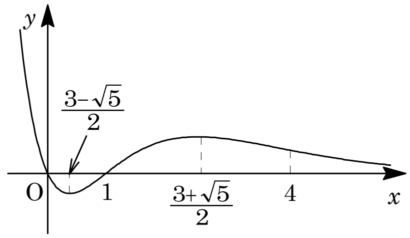
$$f'(x)=(2x-1)e^{-x}-(x^2-x)e^{-x}=-(x^2-3x+1)e^{-x}$$

$$f''(x)=-(2x-3)e^{-x}+(x^2-3x+1)e^{-x}$$
$$=(x^2-5x+4)e^{-x}=(x-1)(x-4)e^{-x}$$

すると，$f(x)$ の増減，および $y=f(x)$ のグラフの凹凸は右表のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+		+	0	−		−
$f''(x)$	+		+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↘		↗	0	↗		↘	$\frac{12}{e^4}$	↘

これより，変曲点は 2 つ存在し，その座標は$(1,\ 0)$と$\left(4,\ \frac{12}{e^4}\right)$である。さらに，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ から，$y=f(x)$のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　接点を$(t,\ (t^2-t)e^{-t})$とおくと，接線は,

$$y-(t^2-t)e^{-t}=-(t^2-3t+1)e^{-t}(x-t),\quad y=-(t^2-3t+1)e^{-t}x+(t^3-2t^2)e^{-t}$$

点$(0,\ a)$を通るので，$a=(t^3-2t^2)e^{-t}$ ………(*)

ここで,(*)の右辺を $g(t)=(t^3-2t^2)e^{-t}$ とおくと,

$$g'(t)=(3t^2-4t)e^{-t}-(t^3-2t^2)e^{-t}$$
$$=(-t^3+5t^2-4t)e^{-t}$$
$$=-t(t-1)(t-4)e^{-t}$$

すると，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

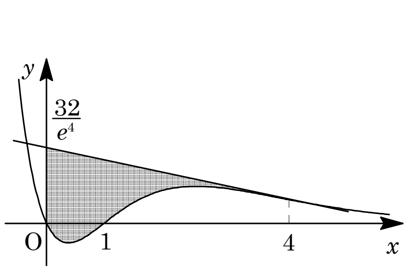
t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−	0	+	0	−
$g(t)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$\frac{32}{e^4}$	↘

さて，$y=f(x)$のグラフの概形から，異なる 2 点で接する接線は存在しないので,点$(0,\ a)$を通る $y=f(x)$ のグラフの接線が 1 本である条件は,(*)がただ 1 つの実数解をもつ条件，すなわち $a>0$ から $a=\frac{32}{e^4}$ である。

このとき，$t=4$ であり，接線の方程式は,

$$y=-\frac{5}{e^4}x+\frac{32}{e^4}$$

これより，$y=f(x)$のグラフ，その接線および y 軸で囲まれた $x\geqq0$ の部分の図形は，右図の網点部のようになり，その面積 S は,



$$S=\int_0^4\left\{-\frac{5}{e^4}x+\frac{32}{e^4}-(x^2-x)e^{-x}\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{5}{2e^4}x^2+\frac{32}{e^4}x\right]_0^4+\left[(x^2-x)e^{-x}\right]_0^4-\int_0^4(2x-1)e^{-x}dx$$
$$=\frac{88}{e^4}+\frac{12}{e^4}+\left[(2x-1)e^{-x}\right]_0^4-\int_0^4 2e^{-x}dx$$
$$=\frac{100}{e^4}+\frac{7}{e^4}+1+2\left[e^{-x}\right]_0^4=\frac{109}{e^4}-1$$

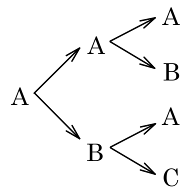
［解 説］

かなりの計算量ですが，内容は接線の本数に関する頻出問題です。ただ，複接線が存在しないことに関しては，図から明らかとして，感覚的に記述しています。

3

問題のページへ

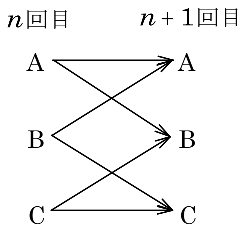
(1)　はじめに，A が赤玉を持っていて，題意の操作をしたところ，赤玉は右図のように移動する。その確率は，いずれも $\frac{1}{2}$ なので，



$$a_1 = b_1 = \frac{1}{2},\ \ c_1 = 0$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},\ \ b_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\ \ c_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(2)　n 回目の操作後から，$n+1$ 回目の操作後への赤玉の移動は右図のようになり，移動の確率は，いずれも $\frac{1}{2}$ から，



$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots\cdots③$$

(3)　$a_n + b_n + c_n = 1$ なので，②から，$b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n)$ となり，

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

よって，$b_n - \frac{1}{3} = \left(b_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ より，$b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdots\cdots\cdots④$

また，①③より，$a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n)$ となり，

$$a_n - c_n = (a_0 - c_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，$a_n + c_n = 1 - b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より，$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$c_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

［解　説］

確率と連立漸化式についての有名問題です。当たり前すぎて忘れがちなポイントは，$a_n + b_n + c_n = 1$ です。なお，文系の類題の方が，記述量が多くなっています。

4

問題のページへ

(1)　$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x$ ……①に対し, k を整数として，$x=6k$ とおくと,

$$y=\frac{1}{3}\cdot 36k^2+\frac{1}{2}\cdot 6k=12k^2+3k$$

すると，点 $(6k,\ 12k^2+3k)$ は，①のグラフ上の格子点となるので，格子点は無限個存在する。

(2)　$y=ax^2+bx$ ……②のグラフ上の原点と異なる 2 つの格子点を，$(p,\ q)$，$(r,\ s)$ とおく。ただし，$p\neq 0$，$r\neq 0$，$p\neq r$ である。

$$ap^2+bp=q\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad ar^2+br=s\ \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$\begin{pmatrix} p^2 & p \\ r^2 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ となり，$p^2r-pr^2=pr(p-r)\neq 0$ より,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{pr(p-r)}\begin{pmatrix} r & -p \\ -r^2 & p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}=\frac{1}{pr(p-r)}\begin{pmatrix} qr-ps \\ -qr^2+p^2s \end{pmatrix}$$

これより, a, b とも有理数となり, l, m, n を整数として，$a=\frac{m}{l}$，$b=\frac{n}{l}$ と置き換えると，②は，$y=\frac{m}{l}x^2+\frac{n}{l}x$ となる。

ここで, k を整数として，$x=lk$ とおくと,

$$y=\frac{m}{l}l^2k^2+\frac{n}{l}lk=mlk^2+nk$$

すると，点 $(lk,\ mlk^2+nk)$ は，②のグラフ上の格子点となるので，格子点は無限個存在する。

［解　説］

格子点に関する証明問題ですが，見かけとは異なり，特別な技法は必要ありません。