1

解答解説のページへ

(1)　関数 $y=x^3-x^2$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=x^3-x^2$ の接線で，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るものをすべて求めよ。

(3)　p を定数とする。x の 3 次方程式 $x^3-x^2=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

2

解答解説のページへ

数字の 2 を書いた玉が 1 個，数字の 1 を書いた玉が 3 個，数字の 0 を書いた玉が 4 個あり，これら合計 8 個の玉が袋に入っている。以下の(1)から(3)のそれぞれにおいて，この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し，取り出した玉は袋に戻さないものとする。

(1)　玉を 2 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ。

(2)　玉を 4 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ。

(3)　玉を 8 度取り出すとき，次の条件が満たされる確率を求めよ。

条件：すべての $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ に対して，1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である。

3

解答解説のページへ

xy 平面上に 3 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(0, 1) がある。

(1) $a>0$ とする。OP : AP＝1 : a を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2) $a>1>b>0$ とする。OP : AP : BP＝1 : a : b を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

1

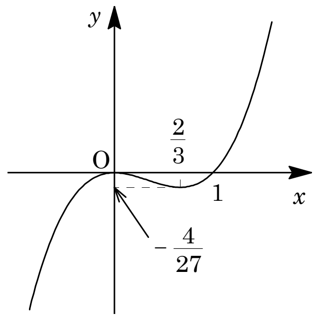
問題のページへ

(1)　$y=x^3-x^2$ ……①に対して，

$$y'=3x^2-2x=x(3x-2)$$

よって，①のグラフは右下図のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$



(2)　接点を$(t,\ t^3-t^2)$とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^3-t^2)=(3t^2-2t)(x-t)$$

$$y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

②が点$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$を通るので，$\frac{3}{2}(3t^2-2t)-2t^3+t^2=0$

$$4t^3-11t^2+6t=0,\ t(4t-3)(t-2)=0$$

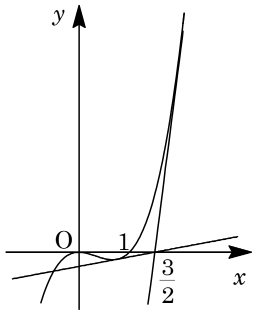
よって，$t=0,\ \frac{3}{4},\ 2$となり，接線の方程式は②から，それぞれ

$$y=0,\ y=\frac{3}{16}x-\frac{9}{32},\ y=8x-12$$

(3)　xの3次方程式$x^3-x^2=p\left(x-\frac{3}{2}\right)$の異なる実数解の個数は，曲線①と点$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$を通る直線$y=p\left(x-\frac{3}{2}\right)$……③の共有点の個数に一致する。

そして，(2)より，$p=0,\ \frac{3}{16},\ 8$のとき，①と③は接する。

よって，求める実数解の個数は，図より$p<0$のとき 1 個，$p=0$のとき 2 個，$0<p<\frac{3}{16}$のとき 3 個，$p=\frac{3}{16}$のとき 2 個，$\frac{3}{16}<p<8$のとき 1 個，$p=8$のとき 2 個，$p>8$のとき 3 個である。



［解　説］

方程式の異なる実数解の個数を，対応するグラフの共有点の個数に翻訳して考える頻出の問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　玉を 2 度取り出すとき，数字の合計が 2 であるのは，$2+0$，$1+1$，$0+2$ の 3 通りより，その確率は，

$$\frac{1}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{4}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{4}$$

(2)　玉を 4 度取り出すとき，玉に書かれた数字の合計が 5 以上となるのは，2 を 1 度，1 を 3 度取り出す場合より，その確率は，

$$\left(\frac{1}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\right)\times\frac{4!}{3!}=\frac{1}{70}$$

よって，玉を 4 度取り出すとき，玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率は，

$$1-\frac{1}{70}=\frac{69}{70}$$

(3)　まず，8 個の玉の数字の合計が 5 より，与えられた条件が満たされないのは，次の 4 つの場合である。

(i)　玉を 1 度取り出したとき，その数字が 2 以上

このときの確率は，$\dfrac{1}{8}$ である。

(ii)　玉を 2 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 3 以上

$1+2$ の場合より，このときの確率は，$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{3}{56}$ である。

(iii) 玉を 3 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 2 以下，3 度目までの合計が 4 以上

$1+1+2$ の場合より，このときの確率は，$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{56}$ である。

(iv) 玉を 4 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 2 以下，3 度目までの合計が 3 以下，4 度目までの合計が 5 以上

$1+1+1+2$ の場合より，このときの確率は，$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{280}$ である。

(i)～(iv)より，与えられた条件が満たされる確率は，

$$1-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{56}+\frac{1}{56}+\frac{1}{280}\right)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

［解 説］

(3)は読解力がポイントです。具体的に考えて，題意を言い換える力が必要です。

3

問題のページへ

(1)　O(0, 0)，A(1, 0)に対し，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，$\mathrm{AP}=a\mathrm{OP}$，$\mathrm{AP}^2=a^2\mathrm{OP}^2$ より，

$$(x-1)^2+y^2=a^2(x^2+y^2),\ (a^2-1)(x^2+y^2)+2x-1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

(i)　$a=1$ のとき

①より，$2x-1=0$ となり，点 P の軌跡は，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　$a\neq 1$ のとき

①より，$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$ となり，点 P の軌跡は円であり，

$$\left(x+\frac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

(2)　(1)より，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡は，$a>1$ から，中心 $\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{a}{a^2-1}$ の円である。また，O(0, 0)，B(0, 1)に対し，$\mathrm{OP}:\mathrm{BP}=1:b$ を満たす点 P の軌跡は，$0<b<1$ から，中心 $\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$，半径 $\dfrac{b}{1-b^2}$ の円である。

よって，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための条件は，

$$\left|\frac{a}{a^2-1}-\frac{b}{1-b^2}\right|\leqq\sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2}\leqq\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{1-b^2}$$

$$\left|a(1-b^2)-b(a^2-1)\right|\leqq\sqrt{(a^2-1)^2+(b^2-1)^2}\leqq a(1-b^2)+b(a^2-1)$$

$a>1>b>0\cdots\cdots$②のもとで，この不等式を変形していくと，

$$\{a(1-b^2)-b(a^2-1)\}^2\leqq(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\leqq\{a(1-b^2)+b(a^2-1)\}^2\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より，$(a^2-1)(1-b^2)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2-2ab(a^2-1)(1-b^2)\leqq 0$

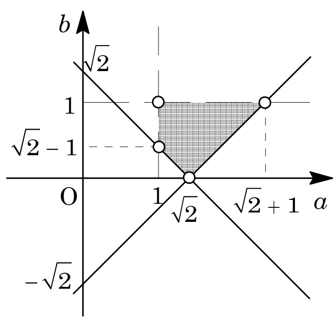
$$(1-b^2)-(a^2-1)-2ab\leqq 0,\ a^2+b^2+2ab\geqq 2,\ a+b\geqq\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，$(a^2-1)(1-b^2)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2+2ab(a^2-1)(1-b^2)\geqq 0$

$$(1-b^2)-(a^2-1)+2ab\geqq 0,\ a^2+b^2-2ab\leqq 2$$

$$a-b\leqq\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

以上より，求める条件は②⑤⑥であり，これを ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，破線の境界線および白丸は領域に含まない。



［解　説］

アポロニウスの円を題材として，さらに 2 円が共有点をもつ条件が味付けされています。計算に工夫が必要な問題です。