1

解答解説のページへ

$-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\left\{(x,\ y,\ 0)\ \middle|\ 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\right\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1)　立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2)　s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。

2

解答解説のページへ

$A_0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$とする。整数 $n\geqq 1$ に対して，次の試行により行列A_{n-1}から行列A_nを定める。

「数字の組$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$を 1 つずつ書いた 4 枚の札が入っている袋から 1 枚を取り出し，その札に書かれている数字の組が$(i,\ j)$のとき，A_{n-1}の$(i,\ j)$成分に 1 を加えた行列をA_nとする。」

この試行を n 回$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$くり返した後に，A_0，A_1，$\cdots$，A_{n-1}が逆行列をもたずA_nは逆行列をもつ確率をp_nとする。

(1) p_2，p_3を求めよ。

(2) $(n-1)$回$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$の試行をくり返した後に，A_{n-1}の第 1 行の成分がいずれも正で第 2 行の成分がいずれも 0 である確率q_{n-1}を求めよ。

(3) p_n $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面上に 3 点 O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1) がある。

(1)　$a>0$ とする。OP : AP = 1 : a を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2)　$a>0$, $b>0$ とする。OP : AP : BP = 1 : a : b を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

a, b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし, x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0,\ \ y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

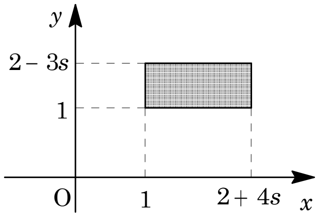
(1)　$a = b$ とするとき, 条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき, 条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　右図の長方形R_sをx軸のまわりに1回転してできる立体K_sの体積$V(s)$は,



$$V(s)=\pi\{(2-3s)^2-1^2\}(2+4s-1)$$
$$=3\pi(3s^2-4s+1)(4s+1)$$
$$V'(s)=3\pi\{(6s-4)(4s+1)+4(3s^2-4s+1)\}$$
$$=6\pi s(18s-13)$$

すると，$-\frac{1}{4}<s<\frac{1}{3}$における$V(s)$の増減は右表のようになる。

s	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$		↗	3π	↘	

よって，$V(s)$は，$s=0$のとき最大値3πをとる。

(2)　$s=0$のとき，長方形$R_s:1\leqq x\leqq 2$, $1\leqq y\leqq 2$となり，立体K_sを表す式は,

$$1\leqq y^2+z^2\leqq 4,\ 1\leqq x\leqq 2$$

さて，立体K_sを，平面$y=k$で切断したときの断面は,

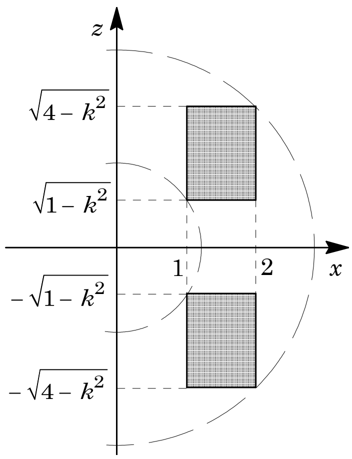
$$1-k^2\leqq z^2\leqq 4-k^2\cdots\cdots\cdots①,\ 1\leqq x\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，断面の存在する k の範囲は，$-2\leqq k\leqq 2$であるが，xz 平面に関する対称性から，以下，$0\leqq k\leqq 2$で考える。

(i)　$0\leqq k\leqq 1$のとき

①より，$\sqrt{1-k^2}\leqq|z|\leqq\sqrt{4-k^2}$

②と合わせると，断面は右図のようになる。



この断面を y 軸のまわりに1回転してできるドーナツ形の図形の外径をR, 内径をrとすると,

$$R^2=2^2+\left(\sqrt{4-k^2}\right)^2=8-k^2$$
$$r^2=1^2+\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2=2-k^2$$

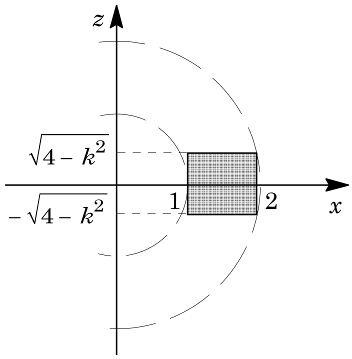
よって，このドーナツ形の面積$S(k)$は,

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=6\pi$$

(ii)　$1\leqq k\leqq 2$のとき

$1-k^2\leqq 0$より，①から，$-\sqrt{4-k^2}\leqq z\leqq\sqrt{4-k^2}$

②と合わせると，断面は右図のようになる。



この断面を y 軸のまわりに1回転してできるドーナツ形の図形の外径をR, 内径をrとすると,

$$R^2=2^2+\left(\sqrt{4-k^2}\right)^2=8-k^2,\ r^2=1^2$$

よって，この図形の面積$S(k)$は，$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi(7-k^2)$

(i)(ii)より，立体Lの体積Vは,

$$V=2\int_0^2 S(k)\,dk=2\int_0^1 6\pi\,dk+2\int_1^2 \pi(7-k^2)\,dk=12\pi+2\pi\Big[7k-\frac{k^3}{3}\Big]_1^2$$

$$=12\pi+\frac{28}{3}\pi=\frac{64}{3}\pi$$

［解 説］

立体の回転体の体積を求める問題で，20 年ほど前にはよく見かけました。回転軸に垂直に切った断面の形状を考えることがポイントです。なお，上の解答例で用いた円柱面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

2　問題のページへ

(1)　数字の組(1, 1)，(1, 2)，(2, 1)，(2, 2)が書かれた札を，それぞれ A, B, C, D とする。これらのいずれの札も，取り出す確率は$\frac{1}{4}$である。

まず，$A_0=O$は逆行列をもたない。また，A_1は 1 つの成分のみが 1 であり，他の 3 つの成分は 0 であるので，逆行列はもたない。さて，A_2が逆行列をもつのは，$A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$のときであり，これはA→D，D→A，B→C，C→Bと取り出す4通りの場合がある。A_0，A_1が逆行列をもたずA_2が逆行列をもつ確率p_2は，

$$p_2=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times 4=\frac{1}{4}$$

また，A_2が逆行列をもたないのは，

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$$

このとき，A_3が逆行列をもつのは，最初に A を取り出したとき，A→A→D，A→B→C，A→B→D，A→C→B，A→C→Dの 5 通りがあり，最初が B, C, D のときも同様なので，A_0，A_1，A_2が逆行列をもたずA_3が逆行列をもつ確率p_3は，

$$p_3=\left(\frac{1}{4}\right)^3\times 5\times 4=\frac{5}{16}$$

(2)　$a>0$, $b>0$として，$A_{n-1}=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}$となるのは，A, Bだけを$n-1$回取り出し，しかもどちらも少なくとも1回は取り出す場合であるので，その確率q_{n-1}は，

$$q_{n-1}=(2^{n-1}-2)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

(3)　A_0，A_1，…，A_{n-1}が逆行列をもたずA_nが逆行列をもつのは，$a>0$, $b>0$として，

(i)　$A_{n-1}=\begin{pmatrix}n-1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&n-1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\n-1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\0&n-1\end{pmatrix}$のとき

n回目に，順にD, C, B, Aを，それぞれ取り出す場合が対応する。

(ii)　$A_{n-1}=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a&0\\b&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix}$のとき

n回目に，順にCまたはD，AまたはB，BまたはD，AまたはCを，それぞれ取り出す場合が対応する。

(i)(ii)より，A_0，A_1，…，A_{n-1}が逆行列をもたずA_nが逆行列をもつ確率p_nは，

$$p_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\frac{1}{4}\times 4+q_{n-1}\times\frac{2}{4}\times 4=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

［解　説］

行列と確率の融合という新鮮な題材です。プロセスは省略ぎみの解答例ですが。

３　　問題のページへ

(1)　O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$に対し，OP : AP $=1:a$ を満たす点 P$(x,\ y)$は，AP $=a$OP，AP$^2=a^2$OP^2 より，

$$(x-1)^2+y^2=a^2(x^2+y^2),\ (a^2-1)(x^2+y^2)+2x-1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

(i)　$a=1$ のとき

①より，$2x-1=0$ となり，点 P の軌跡は，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　$a\neq1$ のとき

①より，$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$ となり，点 P の軌跡は円であり，

$$\left(x+\frac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

(2)　OP : AP $=1:a$ を満たす点 P の軌跡は，(1)より，$a=1$ のとき直線 $x=\dfrac{1}{2}$，$a\neq1$ のとき中心$\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{a}{|a^2-1|}$ の円である。

また，O$(0,\ 0)$，B$(0,\ 1)$に対し，OP : BP $=1:b$ を満たす点 P の軌跡は，$b=1$ のとき直線 $y=\dfrac{1}{2}$，$b\neq1$ のとき中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$，半径 $\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円である。

よって，OP : AP : BP $=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための条件は,

(i)　$a=1$ かつ $b=1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ を満たす点 P$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$が存在する。

(ii)　$a=1$ かつ $b\neq1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$で半径 $\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円を満たす点 P が存在するには,

$$\frac{b}{|b^2-1|}\geqq\frac{1}{2},\ |b^2-1|\leqq2b$$

$b>0$ から，$-2b\leqq b^2-1\leqq2b$ となり，$b^2+2b-1\geqq0$ かつ $b^2-2b-1\leqq0$ より,

$$-1+\sqrt{2}\leqq b\leqq1+\sqrt{2}\quad(b\neq1)$$

(iii)　$a\neq1$ かつ $b=1$ のとき

(ii)と同様にして，$-1+\sqrt{2}\leqq a\leqq1+\sqrt{2}\quad(a\neq1)$

(iv)　$a\neq1$ かつ $b\neq1$ のとき

中心$\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$で半径 $\dfrac{a}{|a^2-1|}$ の円と，中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$で半径 $\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円を満たす点 P が存在するには,

$$\left|\frac{a}{|a^2-1|}-\frac{b}{|b^2-1|}\right|\leqq\sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2}\leqq\frac{a}{|a^2-1|}+\frac{b}{|b^2-1|}$$

$$\left|a|b^2-1|-b|a^2-1|\right| \leqq \sqrt{(a^2-1)^2+(b^2-1)^2} \leqq a|b^2-1|+b|a^2-1|$$

この不等式の各辺を 2 乗すると，次の連立不等式に等しく，

$$\{a|b^2-1|-b|a^2-1|\}^2 \leqq (a^2-1)^2+(b^2-1)^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$(a^2-1)^2+(b^2-1)^2 \leqq \{a|b^2-1|+b|a^2-1|\}^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$(a^2-1)(b^2-1)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2-2ab|a^2-1||b^2-1| \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ④$

③より，$(a^2-1)(b^2-1)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2+2ab|a^2-1||b^2-1| \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

(iv-i)　($a>1$ かつ $b>1$)または($0<a<1$ かつ $0<b<1$)のとき

④より，$(b^2-1)+(a^2-1)-2ab \leqq 0$ となり，$(a-b)^2 \leqq 2$，$|a-b| \leqq \sqrt{2}$

⑤より，$(b^2-1)+(a^2-1)+2ab \geqq 0$ となり，$(a+b)^2 \geqq 2$，$a+b \geqq \sqrt{2}$

(iv-ii)　($a>1$ かつ $0<b<1$)または($0<a<1$ かつ $b>1$)のとき

④より，$(b^2-1)+(a^2-1)+2ab \geqq 0$ となり，$(a+b)^2 \geqq 2$，$a+b \geqq \sqrt{2}$

⑤より，$(b^2-1)+(a^2-1)-2ab \leqq 0$ となり，$(a-b)^2 \leqq 2$，$|a-b| \leqq \sqrt{2}$

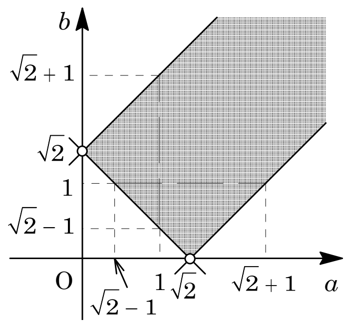
(iv-i) (iv-ii)より，$a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ のとき，

$|a-b| \leqq \sqrt{2}$，$a+b \geqq \sqrt{2}$

(i)～(iv)をまとめると，求める条件は，

$a>0$，$b>0$，$|a-b| \leqq \sqrt{2}$，$a+b \geqq \sqrt{2}$

これを ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含むが，白丸は領域に含まない。



［解　説］

アポロニウスの円を題材として，さらに 2 円が共有点をもつ条件が味付けされています。文系の問題設定を一般化してあり，計算に並々ならぬ注意力が必要です。

4

問題のページへ

(1)　まず, 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ ……①, $y^2+by+a=0$ ……②が, それぞれ整数解をもつとき, a, b が整数より, ①と②の 2 つの解はともに整数である。

さて, $a=b>0$ とするとき, ②は①に一致し, 整数 k, l $(k\leqq l)$ を用いて, ①は,

$$(x+k)(x+l)=0,\ x^2+(k+l)x+kl=0 \text{ ………③}$$

①③の係数を比べると, $k+l=a$ ……④, $kl=a$ ……⑤となり, ④⑤より,

$$kl=k+l,\ (k-1)(l-1)=1 \text{ ………⑥}$$

ここで, ④⑤から $a>0$ に注意すると, k, l は自然数となり, $1\leqq k\leqq l$ である。

すると, ⑥より, $(k-1,\ l-1)=(1,\ 1)$, $(k,\ l)=(2,\ 2)$

よって, $a=4$ である。

(2)　$a>b>0$ とするとき, (1)と同様に, 整数 k, l $(k\leqq l)$ を用いて, ①は,

$$(x+k)(x+l)=0,\ x^2+(k+l)x+kl=0$$

よって, $k+l=a$ ……⑦, $kl=b$ ……⑧となり, $a>b$ と⑦⑧から,

$$kl<k+l,\ (k-1)(l-1)<1 \text{ ………⑨}$$

一方, $a>0$, $b>0$ から k, l は自然数となり, $1\leqq k\leqq l$ であることから,

$$(k-1)(l-1)\geqq 0 \text{ ………⑩}$$

⑨⑩より, $(k-1)(l-1)=0$ となり, $k=1$ である。

すると, ⑦から $a=l+1$, ⑧から $b=l$ となり, 2 次方程式②は,

$$y^2+ly+(l+1)=0 \text{ ………⑪}$$

ここで, (1)と同様にして, 整数 m, n $(m\leqq n)$ を用いて, ⑪は,

$$(y+m)(y+n)=0,\ y^2+(m+n)x+mn=0 \text{ ………⑫}$$

⑪⑫の係数を比べると, $m+n=l$ ……⑬, $mn=l+1$ ……⑭となり, ⑬⑭より,

$$mn=m+n+1,\ (m-1)(n-1)=2 \text{ ………⑮}$$

ここで, ⑬⑭から $l>0$ に注意すると, m, n は自然数となり, $1\leqq m\leqq n$ である。

すると, ⑮より, $(m-1,\ n-1)=(1,\ 2)$, $(m,\ n)=(2,\ 3)$

よって, $l=5$ から, $a=6$, $b=5$ である。

［解 説］

2 つの自然数の和と積の大小関係を, 和と積が等しいのは $2+2=2\times2$, 和が積より大きいのは $1+*>1\times*$ というイメージを用いて解いています。他の解法もいろいろ考えられそうな, 演習に価値ある整数問題です。