**1**

解答解説のページへ

$xy$ 平面上に，点$(0,\ 1)$を通り，傾きが $h$ の直線 $l$ がある。

(1)　$xy$ 平面において，$l$ に関して点$\mathrm{P}(a,\ b)$と対称な点を$\mathrm{Q}(s,\ t)$とする。このとき，$a, b, h$ を用いて $s, t$ を表せ。ただし，点$\mathrm{P}(a,\ b)$は $l$ 上にないとする。

(2)　$xy$ 平面において，$l$ に関して原点$\mathrm{O}(0,\ 0)$と対称な点を A とする。$h$ が $-1 \leqq h \leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ。

(3)　$h$ が $-1 \leqq h \leqq 1$ の範囲を動くときの点 A の軌跡を $C$ とする。$C$ と直線 $y=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

$n$ を 2 以上の整数とする。1 から $n$ までの整数が 1 つずつ書かれている $n$ 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この $n$ 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を $X$，最大値を $Y$ とする。次の問いに答えよ。ただし，$j$ と $k$ は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，$s$ は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる確率を求めよ。

(3)　$Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4)　$n$ が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする $s$ を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

$m$ を正の奇数とする。

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における $x^2$ の項の係数を求めよ。

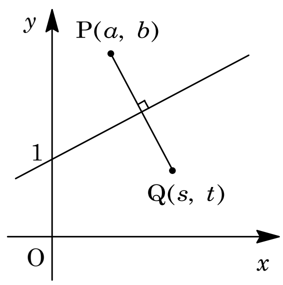
(2)　$p$ を正の整数とするとき，$(p-1)^m+1$ は $p$ で割り切れることを示せ。

(3)　$r$ を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。$2^s+1$ は $3^r$ で割り切れることを示せ。

**1**

問題のページへ

(1)　直線$l: y=hx+1$から，$hx-y+1=0$となり，法線ベクトルの成分が$(h,\ -1)$となる。




ここで，条件より，線分 PQ の垂直二等分線が $l$ なので，$k$を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k(h,\ -1)$から，

$$s=a+kh\cdots\cdots\cdots①,\ t=b-k\cdots\cdots\cdots②$$

また，線分 PQ の中点$\left(a+\dfrac{k}{2}h,\ b-\dfrac{k}{2}\right)$が $l$ 上にあるので，

$$h\left(a+\frac{k}{2}h\right)-\left(b-\frac{k}{2}\right)+1=0,\ (h^2+1)k+2ah-2b+2=0$$

よって，$k=\dfrac{-2ah+2b-2}{h^2+1}$となり，①，②に代入すると，

$$s=a+\frac{-2ah+2b-2}{h^2+1}h=\frac{-ah^2+(2b-2)h+a}{h^2+1}\cdots\cdots\cdots③$$

$$t=b-\frac{-2ah+2b-2}{h^2+1}=\frac{bh^2+2ah-b+2}{h^2+1}\cdots\cdots\cdots④$$

(2)　$\mathrm{A}(x,\ y)$とすると，③④において$a=b=0$，$x=s$，$y=t$となり，

$$x=\frac{-2h}{h^2+1}\cdots\cdots\cdots⑤,\ y=\frac{2}{h^2+1}\cdots\cdots\cdots⑥$$

これより，$\mathrm{OA}^2=\left(\dfrac{-2h}{h^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{2}{h^2+1}\right)^2=\dfrac{4(h^2+1)}{(h^2+1)^2}=\dfrac{4}{h^2+1}$

ここで，$-1\leqq h\leqq 1$から$1\leqq h^2+1\leqq 2$となるので，$2\leqq \mathrm{OA}^2\leqq 4$となり，OA の最大値は 2，最小値は$\sqrt{2}$である。

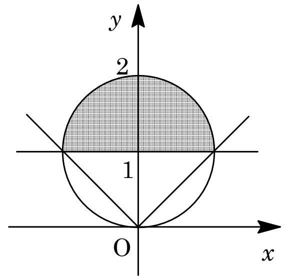
(3)　⑤⑥より，$x=-hy$となり，$y>0$から，$h=-\dfrac{x}{y}\cdots\cdots\cdots⑦$

⑦を⑥に代入すると，$y\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1\right)=2$から，$x^2+y^2=2y$となり，

$$x^2+(y-1)^2=1$$

また，$-1\leqq h\leqq 1$から，⑦に代入すると，$-1\leqq -\dfrac{x}{y}\leqq 1$

よって，$y\geqq x$かつ$y\geqq -x$となり，点 A の軌跡 $C$ と直線 $y=1$に囲まれた図形は右図の網点部となり，その面積 $S$ は，$S=\dfrac{1}{2}\times\pi\cdot 1^2=\dfrac{\pi}{2}$である。




［解　説］

線対称移動を題材にした頻出問題です。ただ，計算が繁雑という(1)の印象が，(2)と(3)で一変しました。

**2**

問題のページへ

(1) $n$ 枚のカードをもとに戻しながら 1 枚ずつ取り出す試行を 3 回繰り返すとき，$n^3$ 通りの場合が同様に確からしい。

さて，書かれた整数の最小値を $X$，最大値を $Y$ とするとき，$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$ であるのは，$j$ 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚のカードを 3 回取り出すことより，その確率 $P(j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k)$ は，

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) = \frac{(k+1)^3}{n^3}$$

(2) 「$X = j$ かつ $Y = j+k$」となるのは，「$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$」の場合から「$j+1 \leqq X$ または $Y \leqq j+k-1$」の場合を除いたものになる。

ここで，(1)と同様に考えると，$P(j+1 \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) = \dfrac{k^3}{n^3}$

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k-1) = \frac{k^3}{n^3},\quad P(j+1 \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k-1) = \frac{(k-1)^3}{n^3}$$

すると，求める確率 $P(j = X \text{かつ} Y = j+k)$ は，

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) - P(j+1 \leqq X \text{または} Y \leqq j+k-1)$$

$$= \frac{(k+1)^3}{n^3} - \left\{ \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \right\} = \frac{(k+1)^3}{n^3} - \frac{2k^3}{n^3} + \frac{(k-1)^3}{n^3} = \frac{6k}{n^3}$$

(3) (2)より，$X = j$ かつ $Y = j+s$　$(1 \leqq j \leqq n-s)$ となる確率は，それぞれ $\dfrac{6s}{n^3}$ であり，$Y - X = s$ となる確率 $P(s)$ は，

$$P(s) = \frac{6s}{n^3} \times (n-s) = -\frac{6}{n^3}(s^2 - ns)$$

(4) (3)より，$P(s) = -\dfrac{6}{n^3}\left(s - \dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2n}$

すると，$n$ は偶数より，$s = \dfrac{n}{2}$ のとき $P(s)$ は最大となる。

［解　説］

最大，最小の確率を問う有名問題です。(2)の考え方はオーソドックスなものです。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　二項定理より，$(x-1)^{101}$ の展開式における $x^2$ の係数は,

$$ {}_{101}\mathrm{C}_2\cdot(-1)^{99}=-\frac{101\times 100}{2}=-5050 $$

(2)　$p$ は正の整数, $m$ は正の奇数から，二項定理を用いると,

$$ (p-1)^m+1=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+1=\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+(-1)^m+1 $$

$$ =\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k=p\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^{k-1} $$

よって，$(p-1)^m+1$ は $p$ で割り切れる。

(3)　$r$ を正の整数，$s=3^{r-1}m$ のとき，$2^s+1$ は $3^r$ で割り切れることを，$r$ に関する数学的帰納法で示す。

(i)　$r=1$ のとき

$s=3^0m=m$ となり，(2)の結論に $p=3$ を適用すると，$2^m+1=(3-1)^m+1$ は 3 すなわち $3^1$ で割り切れる。よって，$r=1$ のとき成立する。

(ii)　$r=l$ のとき

$2^{3^{l-1}m}+1$ が $3^l$ で割り切れると仮定し, $n$ を整数として，$2^{3^{l-1}m}+1=3^ln$ とおく。

$$ 2^{3^lm}+1=2^{3^{l-1}\cdot 3m}+1=\left(2^{3^{l-1}m}\right)^3+1=\left(3^ln-1\right)^3+1 $$

$$ =(3^ln)^3-3(3^ln)^2+3(3^ln)-1+1=3^{l+1}(3^{2l-1}n^3-3^ln^2+n) $$

よって，$2^{3^lm}+1$ は $3^{l+1}$ で割り切れる。

(i)(ii)より，$s=3^{r-1}m$ のとき，$2^s+1$ は $3^r$ で割り切れる。

［解　説］

二項定理の応用問題です。(3)は数学的帰納法という手段を決めれば，スムーズに論理が展開できます。