1

解答解説のページへ

a を正の定数とし, xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1) C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし, t は 0 でないとする。

(2) b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3) C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え, それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$f_0(x)=xe^x$ として，正の整数 n に対して，

$$f_n(x)=\int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)\,dt+f_{n-1}{}'(x)$$

により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1)　$f_1(x)$ を求めよ。

(2)　$g(x)=\int_{-x}^{x}(at+b)e^t\,dt$ とするとき，定積分 $\int_{-c}^{c} g(x)\,dx$ を求めよ。ただし，a，b，c は定数とする。

(3)　正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2)　$X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ。

(3)　$Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。

4

解答解説のページへ

m, p を 3 以上の奇数とし, m は p で割り切れないとする。

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2)　$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3)　$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4)　r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$C: y=x^3-a^2x$ ……①に対して，$y'=3x^2-a^2$ となり，点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線 l の方程式は,

$$y-(t^3-a^2t)=(3t^2-a^2)(x-t),\quad y=(3t^2-a^2)x-2t^3 \text{ ………③}$$

①②を連立して，$x^3-a^2x=(3t^2-a^2)x-2t^3$

$$x^3-3t^2x+2t^3=0,\quad (x-t)^2(x+2t)=0$$

よって，$x=t,\ -2t$ となり，$t\neq 0$ から, l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\left|\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)\,dt\right|=\left|\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x-t+3t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_{-2t}^{t}\{(x-t)^3+3t(x-t)^2\}\,dt\right|=\left|\left[\frac{1}{4}(x-t)^4+t(x-t)^3\right]_{-2t}^{t}\right|$$

$$=\left|-\frac{81}{4}t^4+27t^4\right|=\frac{27}{4}t^4$$

(2)　接線 l が点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通る条件は,

$$b=(3t^2-a^2)\cdot 2a-2t^3,\quad -2t^3+6at^2-2a^3=b \text{ ………④}$$

ここで，$f(t)=-2t^3+6at^2-2a^3$ とおくと,

$$f'(t)=-6t^2+12at=-6t(t-2a)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$	$6a^3$	$\searrow$

さて，曲線 C には異なる 2 点で接する接線が存在しないので，④の実数解の個数は接線の本数と等しい。

よって，接線の本数は，$-2a^3<b<6a^3$ のとき 3 本，$b=-2a^3,\ 6a^3$ のとき 2 本，$b<-2a^3,\ 6a^3<b$ のとき 1 本である。

(3)　(i)　$b=-2a^3$ のとき

④より，$-2t^3+6at^2=0$ となり，$t=0,\ 3a$

すると，$t=0$ のとき接線 l は原点を通るので不適である。

(ii)　$b=6a^3$ のとき

④より，$-2t^3+6at^2-8a^3=0$ となり，$(t-2a)^2(t+a)=0$

(1)より，l と C で囲まれた図形の面積は，$t=2a$ のとき $\frac{27}{4}\cdot(2a)^4=16\cdot\frac{27}{4}a^4$ であり，$t=-a$ のとき $\frac{27}{4}\cdot(-a)^4=\frac{27}{4}a^4$ となる。

すると，$S_1\geqq S_2$ から，$S_1=16\cdot\frac{27}{4}a^4$，$S_2=\frac{27}{4}a^4$ となり，$\frac{S_1}{S_2}=16$ である。

[解 説]

次の課程では，文理共通範囲で頻出と思われる典型題の集まりです。

2　　　　問題のページへ

(1)　$f_0(x) = xe^x$ より，$f_0{}'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ となり，

$$f_1(x) = \int_{-x}^{x} te^t\,dt + (1+x)e^x = \Big[\,te^t - e^t\,\Big]_{-x}^{x} + (1+x)e^x$$

$$= (x-1)e^x - (-x-1)e^{-x} + (1+x)e^x = 2xe^x + (x+1)e^{-x}$$

(2)　$g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} (at+b)e^t dt = \Big[\,(at+b)e^t\,\Big]_{-x}^{x} - a\int_{-x}^{x} e^t\,dt$

$$= (ax+b)e^x - (-ax+b)e^{-x} - ae^x + ae^{-x}$$

$$= (ax-a+b)e^x + (ax+a-b)e^{-x}$$

すると，$g(-x) = (-ax-a+b)e^{-x} + (-ax+a-b)e^x = -g(x)$ となり，$u = -x$ とおくと，

$$\int_{-c}^{c} g(x)dx = \int_{-c}^{c} -g(-x)dx = \int_{c}^{-c} -g(u)(-du) = -\int_{-c}^{c} g(u)du$$

よって，$\displaystyle\int_{-c}^{c} g(x)dx = 0$ である。

(3)　$f_1(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f_0(t)dt + f_0{}'(x)$ なので, (2)より，

$$\int_{-x}^{x} f_1(t)dt = \int_{-x}^{x} f_0{}'(t)dt = \Big[\,f_0(t)\,\Big]_{-x}^{x} = f_0(x) - f_0(-x) = xe^x + xe^{-x}$$

すると，$f_2(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f_1(t)dt + f_1{}'(x) = xe^x + xe^{-x} + (2x+2)e^x + (1-x-1)e^{-x}$

$$= (3x+2)e^x$$

これより，a_n，b_n を定数として，$f_{2n}(x) = (a_nx + b_n)e^x$ と推測できるので，以下, 0 以上の整数 n で, この式を数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n = 0$ のとき　$a_0 = 1$，$b_0 = 0$ である。

(ii)　$n = k$ のとき　$f_{2k}(x) = (a_kx + b_k)e^x$ であると仮定すると，

$$f_{2k+1}(x) = \int_{-x}^{x} f_{2k}(t)dt + f_{2k}{}'(x)$$

すると，$f_{2k+2}(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f_{2k+1}(t)dt + f_{2k+1}{}'(x)$ ……①なので, (2)より，

$$\int_{-x}^{x} f_{2k+1}(t)dt = \int_{-x}^{x} f_{2k}{}'(t)dt = \Big[\,f_{2k}(t)\,\Big]_{-x}^{x} = f_{2k}(x) - f_{2k}(-x)$$

$$= (a_kx + b_k)e^x - (-a_kx + b_k)e^{-x}$$

$$f_{2k+1}{}'(x) = f_{2k}(x) - \{-f_{2k}(-x)\} + f_{2k}{}''(x)$$

$$= (a_kx + b_k)e^x + (-a_kx + b_k)e^{-x} + (a_kx + 2a_k + b_k)e^x$$

$$= (2a_kx + 2a_k + 2b_k)e^x + (-a_kx + b_k)e^{-x}$$

よって, ①より，$f_{2k+2}(x) = (3a_kx + 2a_k + 3b_k)e^x$ となる。

ここで，$a_{k+1}=3a_k$ ……②，$b_{k+1}=2a_k+3b_k$ ……③とおくと，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$ である。

さて，②より，$a_{n+1}=3a_n$ なので，$a_n=a_0\cdot 3^n=3^n$

また，③より，$b_{n+1}=2a_n+3b_n=3b_n+2\cdot 3^n$ なので，$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{b_n}{3^n}+\dfrac{2}{3}$ から，

$$\frac{b_n}{3^n}=\frac{b_0}{3^0}+\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}n\,,\ \ b_n=\frac{2}{3}n\cdot 3^n=2n\cdot 3^{n-1}$$

以上より，$f_{2n}(x)=(3^nx+2n\cdot 3^{n-1})e^x$ である。

［解 説］

定積分の計算問題です。(2)の誘導を用いると計算量は減少しますが，それでもかなりの量があります。なお，(2)では $g(x)$ が奇関数であることを見つけたような記述をしていますが，これは文脈から「におい」を感じとった結果にすぎません。

3

問題のページへ

(1) n 枚のカードをもとに戻しながら 1 枚ずつ取り出す試行を 3 回繰り返すとき，n^3 通りの場合が同様に確からしい。

さて，書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とするとき，$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$ であるのは，j 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚のカードを 3 回取り出すことより，その確率 $P(j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k)$ は，

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) = \frac{(k+1)^3}{n^3}$$

(2) 「$X = j$ かつ $Y = j+k$」となるのは，「$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$」の場合から「$j+1 \leqq X$ または $Y \leqq j+k-1$」の場合を除いたものになる。

ここで，(1)と同様に考えると，$P(j+1 \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) = \dfrac{k^3}{n^3}$

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k-1) = \frac{k^3}{n^3},\ P(j+1 \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k-1) = \frac{(k-1)^3}{n^3}$$

すると，求める確率 $P(j = X$ かつ $Y = j+k)$ は，

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) - P(j+1 \leqq X \text{または} Y \leqq j+k-1)$$

$$= \frac{(k+1)^3}{n^3} - \left\{ \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \right\} = \frac{(k+1)^3}{n^3} - \frac{2k^3}{n^3} + \frac{(k-1)^3}{n^3} = \frac{6k}{n^3}$$

(3) (2)より，$X = j$ かつ $Y = j+s$ $(1 \leqq j \leqq n-s)$ となる確率は，それぞれ $\dfrac{6s}{n^3}$ であり，

$Y - X = s$ となる確率 $P(s)$ は，

$$P(s) = \frac{6s}{n^3} \times (n-s) = -\frac{6}{n^3}(s^2 - ns)$$

(4) (3)より，$P(s) = -\dfrac{6}{n^3}\left(s - \dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2n}$

すると，n は偶数より，$s = \dfrac{n}{2}$ のとき $P(s)$ は最大となる。

［解 説］

最大，最小の確率を問う有名問題です。(2)の考え方はオーソドックスなものです。

4

問題のページへ

(1)　二項定理より，$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の係数は,

$$ {}_{101}\mathrm{C}_2\cdot(-1)^{99}=-\frac{101\times100}{2}=-5050 $$

(2)　m, p は 3 以上の奇数から，二項定理を用いると,

$$ (p-1)^m+1=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+1=\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+(-1)^m+1 $$

$$ =\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k=p\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^{k-1} $$

よって，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れる。

(3)　(2)より，$(p-1)^m+1=\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k=\sum_{k=2}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+{}_m\mathrm{C}_1(-1)^{m-1}p$

$$ =p^2\sum_{k=2}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^{k-2}+mp $$

m は p で割り切れないので，mp は p^2 で割り切れない。すなわち，$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れない。

(4)　r を正の整数，$s=3^{r-1}m$ のとき，2^s+1 は 3^r で割り切れることを，r に関する数学的帰納法で示す。

(i)　$r=1$ のとき

$s=3^0m=m$ となり，(2)の結論に $p=3$ を適用すると，$2^m+1=(3-1)^m+1$ は 3 すなわち 3^1 で割り切れる。よって，$r=1$ のとき成立する。

(ii)　$r=l$ のとき

$2^{3^{l-1}m}+1$ が 3^l で割り切れると仮定し，n を整数として，$2^{3^{l-1}m}+1=3^ln$ とおく。

$$ 2^{3^lm}+1=2^{3^{l-1}\cdot3m}+1=\left(2^{3^{l-1}m}\right)^3+1=\left(3^ln-1\right)^3+1 $$

$$ =(3^ln)^3-3(3^ln)^2+3(3^ln)-1+1=3^{l+1}(3^{2l-1}n^3-3^ln^2+n) $$

よって，$2^{3^lm}+1$ は 3^{l+1} で割り切れる。

(i)(ii)より，$s=3^{r-1}m$ のとき，2^s+1 は 3^r で割り切れる。

［解　説］

二項定理の応用問題です。(4)は数学的帰納法という手段を決めれば，スムーズに論理が展開できます。