1

解答解説のページへ

3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1)　p_1，q_1 を求めよ。

(2)　p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3)　ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり，C_1 の周上に定点 A がある。点 P, Q はそれぞれ C_1，C_2 の周上を反時計回りに動き，ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む。時刻 $t=0$ において，P は A の位置にあって O，P，Q はこの順に同一直線上に並んでいる。$0 \leqq t \leqq 4\pi$ のとき△APQ の面積の 2 乗の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$k,\ m,\ n$ は整数とし，$n\geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,\ S_k(1)=1\ (k\geqq 0)$$

$$\begin{aligned}T_m(n)&={}_m\mathrm{C}_1 S_1(n)+{}_m\mathrm{C}_2 S_2(n)+{}_m\mathrm{C}_3 S_3(n)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n)\\&=\sum_{k=1}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_k S_k(n)\quad (m\geqq 2)\end{aligned}$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　p が 7 以上の素数のとき，$S_1(p-1)$，$S_2(p-1)$，$S_3(p-1)$，$S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　3 人で 1 回ジャンケンをすると，手の出方は$3^3=27$通りあり，これらの場合が同様に確からしい。

さて，2 人勝ち残るのは，勝った人の選び方が${}_3C_2=3$通りで，その手の出方が 3 通りであるので，確率p_1は，$p_1=\dfrac{3\times3}{27}=\dfrac{1}{3}$である。

また，3 人残るのは，3 人とも同じ手を出す 3 通りか，3 人とも異なる手を出す$3!=6$通りのいずれかより，その確率q_1は，$q_1=\dfrac{3+6}{27}=\dfrac{1}{3}$である。

(2)　まず，2 人で 1 回ジャンケンをすると，手の出方は$3^2=9$通りあり，これらの場合が同様に確からしい。そこで，2 人残るのは，2 人とも同じ手を出すアイコの 3 通りの場合だけであり，その確率は，$\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$である。

さて，$n+1$回目終了時に 2 人が残っているのは，n回目終了時に 2 人が残ってアイコのときか，n回目終了時に 3 人が残って 2 人が勝ち残るときのいずれかより，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①$$

また，$n+1$回目終了時に 3 人が残っているのは，n回目終了時に 3 人が残ってアイコのときより，

$$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$q_n=q_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

①に代入して，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$となり，$3^{n+1}p_{n+1}=3^np_n+1$と変形すると，

$$3^np_n=3^1p_1+(n-1)=1+n-1=n,\ \ p_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3)　$n\geqq2$のとき，ちょうどn回目で 1 人勝ち残りが決まるのは，次の場合である。

(i)　$n-1$回目終了時に 2 人が残ってn回目にアイコでないとき

$$p_{n-1}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(ii)　$n-1$回目終了時に 3 人が残ってn回目に 1 人勝ち残るとき

$$q_{n-1}\times(1-p_1-q_1)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(i)(ii)より，求める確率は，$2(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=(2n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

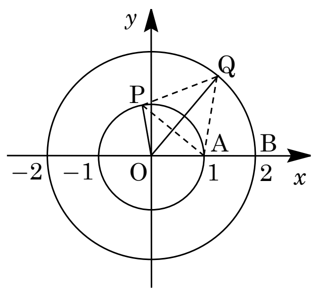
なお，この式は$n=1$のときも成立する。

［解　説］

有名問題ですが，漸化式を立てるメリットがほとんど感じられないものです。

2

問題のページへ



右図のように，点 O を原点とし，A$(1,\ 0)$，B$(2,\ 0)$とおくと，弧 AP, BQ の長さがともに t より，OP, OQ を x 軸の正の部分から測った角は，それぞれ t, $\dfrac{t}{2}$ である。

すると，$\mathrm{P}(\cos t,\ \sin t)$，$\mathrm{Q}\left(2\cos\dfrac{t}{2},\ 2\sin\dfrac{t}{2}\right)$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos t-1,\ \sin t)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(2\cos\frac{t}{2}-1,\ 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

さて，△APQ の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left|(\cos t-1)\cdot 2\sin\frac{t}{2}-\sin t\cdot\left(2\cos\frac{t}{2}-1\right)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|2\cos t\sin\frac{t}{2}-2\sin t\cos\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}+\sin t\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|-2\sin\left(t-\frac{t}{2}\right)-2\sin\frac{t}{2}+\sin t\right|=\frac{1}{2}\left|\sin t-4\sin\frac{t}{2}\right|$$
$$S^2=\frac{1}{4}\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}-4\sin\frac{t}{2}\right)^2=\sin^2\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}-2\right)^2$$

$u=\cos\dfrac{t}{2}$ とおくと，$0\leqq t\leqq 4\pi$ から $-1\leqq u\leqq 1$ であり，さらに $f(u)=S^2$ とすると，

$$f(u)=(1-u^2)(u-2)^2=-u^4+4u^3-3u^2-4u+4$$
$$f'(u)=-4u^3+12u^2-6u-4$$
$$=-2(u-2)(2u^2-2u-1)$$

u	-1	$\cdots$	$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，右表の $f(u)$ の増減から，$f(u)$ は $u=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ で最大となり，最大値は，

$$f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=\left(1-\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}-2\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{6+3\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}+9}{4}$$

［解　説］

三角関数の微分法は利用できないので，S^2 を考えるという誘導をつけて，最大値にアプローチするという形式になっています。

3

問題のページへ

(1)　二項定理を利用すると，$S_k(1)=1$，$S_k(2)=1^k+2^k$ より，

$$T_m(1)={}_m\mathrm{C}_1S_1(1)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(1)+{}_m\mathrm{C}_3S_3(1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(1)$$
$$={}_m\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_3+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}=(1+1)^m-{}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_m=2^m-2$$
$$T_m(2)={}_m\mathrm{C}_1S_1(2)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(2)+{}_m\mathrm{C}_3S_3(2)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(2)$$
$$={}_m\mathrm{C}_1(1+2^1)+{}_m\mathrm{C}_2(1+2^2)+{}_m\mathrm{C}_3(1+2^3)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(1+2^{m-1})$$
$$=T_m(1)+\{(1+2)^m-{}_m\mathrm{C}_0 2^0-{}_m\mathrm{C}_m 2^m\}$$
$$=2^m-2+3^m-1-2^m=3^m-3$$

(2)　$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$ であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　(1)より成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$T_m(l)=(l+1)^m-(l+1)$ であると仮定すると，

$$T_m(l+1)={}_m\mathrm{C}_1S_1(l+1)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(l+1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(l+1)$$
$$={}_m\mathrm{C}_1\{1+2+\cdots+l+(l+1)\}+{}_m\mathrm{C}_2\{1^2+2^2+\cdots+l^2+(l+1)^2\}$$
$$+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\{1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots+l^{m-1}+(l+1)^{m-1}\}$$
$$=T_m(l)+{}_m\mathrm{C}_1(l+1)+{}_m\mathrm{C}_2(l+1)^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(l+1)^{m-1}$$
$$=(l+1)^m-(l+1)+\{(1+l+1)^m-{}_m\mathrm{C}_0(l+1)^0-{}_m\mathrm{C}_m(l+1)^m\}$$
$$=(l+1)^m-(l+1)+(l+2)^m-1-(l+1)^m=(l+2)^m-(l+2)$$

(i)(ii)より，$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$

(3)　$m=2$，$n=p-1$ のとき，$T_2(p-1)={}_2\mathrm{C}_1S_1(p-1)$ となり，(2)から，

$$(p-1+1)^2-(p-1+1)=2S_1(p-1),\ \ 2S_1(p-1)=p(p-1)$$

p は 7 以上の素数より，$S_1(p-1)$ は p の倍数である。

また，$m=3$，$n=p-1$ のとき，$T_3(p-1)={}_3\mathrm{C}_1S_1(p-1)+{}_3\mathrm{C}_2S_2(p-1)$ から，

$$p^3-p=3S_1(p-1)+3S_2(p-1),\ \ 3S_2(p-1)=p(p^2-1)-3S_1(p-1)$$

p は 7 以上の素数より，$S_2(p-1)$ は p の倍数である。

同様にして，$m=4$，$m=5$ のときも考えると，

$$T_4(p-1)={}_4\mathrm{C}_1S_1(p-1)+{}_4\mathrm{C}_2S_2(p-1)+{}_4\mathrm{C}_3S_3(p-1)$$
$$T_5(p-1)={}_5\mathrm{C}_1S_1(p-1)+{}_5\mathrm{C}_2S_2(p-1)+{}_5\mathrm{C}_3S_3(p-1)+{}_5\mathrm{C}_4S_4(p-1)$$

よって，$4S_3(p-1)=p(p^3-1)-4S_1(p-1)-6S_2(p-1)$

$$5S_4(p-1)=p(p^4-1)-5S_1(p-1)-10S_2(p-1)-10S_3(p-1)$$

p は 7 以上の素数より，$S_3(p-1)$，$S_4(p-1)$ はともに p の倍数である。

［解　説］

(3)では，直接的に和を求めることを避けて(2)を利用させるために，p は 7 以上の素数となっているのでしょう。