1

解答解説のページへ

3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1)　p_1，q_1 を求めよ。

(2)　p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3)　ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$x>0$ とし，$f(x)=\log x^{100}$ とおく。

(1) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\frac{100}{x}$$

(2) 実数 a の整数部分($k\leqq a<k+1$ となる整数 k)を $[a]$ で表す。整数 $[f(1)]$, $[f(2)]$, $[f(3)]$, …, $[f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば, $\log 10=2.3026$ として計算せよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$k,\ m,\ n$ は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k,\ S_k(1) = 1\ (k \geqq 0)$$

$$\begin{aligned} T_m(n) &= {}_m\mathrm{C}_1 S_1(n) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(n) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(n) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n) \quad (m \geqq 2) \end{aligned}$$

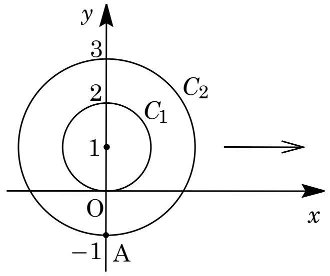
(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　p が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを示せ。

4

解答解説のページへ



半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円盤 C_2 に貼り付けられており，2 つの円盤の中心は一致する。図のように，時刻 $t=0$ において C_1 は $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で x 軸に接し，A は座標 $(0,\ -1)$ の位置にある。2 つの円盤は一体となり，C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく。時刻 t で C_1 の中心が点 $(t,\ 1)$ にあるように転がるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ においてAが描く曲線を C とする。

(1)　時刻 t における A の座標を $(x(t),\ y(t))$ で表す。$(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

(2)　$x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ，$x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標をすべて求めよ。

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　3 人で 1 回ジャンケンをすると，手の出方は $3^3=27$ 通りあり，これらの場合が同様に確からしい。

さて，2 人勝ち残るのは，勝った人の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りで，その手の出方が 3 通りであるので，確率 p_1 は，$p_1=\dfrac{3\times 3}{27}=\dfrac{1}{3}$ である。

また，3 人残るのは，3 人とも同じ手を出す 3 通りか，3 人とも異なる手を出す $3!=6$ 通りのいずれかより，その確率 q_1 は，$q_1=\dfrac{3+6}{27}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　まず，2 人で 1 回ジャンケンをすると，手の出方は $3^2=9$ 通りあり，これらの場合が同様に確からしい。そこで，2 人残るのは，2 人とも同じ手を出すアイコの 3 通りの場合だけであり，その確率は，$\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$ である。

さて，$n+1$ 回目終了時に 2 人が残っているのは，n 回目終了時に 2 人が残ってアイコのときか，n 回目終了時に 3 人が残って 2 人が勝ち残るときのいずれかより，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①$$

また，$n+1$ 回目終了時に 3 人が残っているのは，n 回目終了時に 3 人が残ってアイコのときより，

$$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$q_n=q_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

①に代入して，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ となり，$3^{n+1}p_{n+1}=3^np_n+1$ と変形すると，

$$3^np_n=3^1p_1+(n-1)=1+n-1=n,\ \ p_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3)　$n\geqq 2$ のとき，ちょうど n 回目で 1 人勝ち残りが決まるのは，次の場合である。

(i)　$n-1$ 回目終了時に 2 人が残って n 回目にアイコでないとき

$$p_{n-1}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(ii)　$n-1$ 回目終了時に 3 人が残って n 回目に 1 人勝ち残るとき

$$q_{n-1}\times(1-p_1-q_1)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(i)(ii)より，求める確率は，$2(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=(2n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

なお，この式は $n=1$ のときも成立する。

［解　説］

有名問題ですが，漸化式を立てるメリットがほとんど感じられないものです。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=\log x^{100}=100\log x$ より，$f'(x)=\dfrac{100}{x}$ となるので，$0<x<c<x+1$ を満たすある c に対して，平均値の定理から，

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\frac{100}{c},\quad f(x+1)-f(x)=\frac{100}{c}$$

すると，$\dfrac{100}{x+1}<\dfrac{100}{c}<\dfrac{100}{x}$ より，$\dfrac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{100}{x}$

(2)　n を整数とすると，(1)より，$\dfrac{100}{n+1}<f(n+1)-f(n)<\dfrac{100}{n}$

ここで，$\dfrac{100}{n+1}\geqq 1$ とすると $n\leqq 99$ となり，このとき $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が 1 より大となるので，整数$[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，…，$[f(100)]$はすべて異なる。

また，$\dfrac{100}{n}\leqq 1$ とすると $n\geqq 100$ であり，このとき $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が 1 より小となり，$[f(100)]$，$[f(101)]$，$[f(102)]$，…，$[f(1000)]$は，$[f(100)]$以上$[f(1000)]$以下のいずれかの整数をもれなくとり，

$$[f(100)]=[100\log 100]=[200\log 10]=[460.52]=460$$
$$[f(1000)]=[100\log 1000]=[300\log 10]=[690.78]=690$$

以上より，$[f(1)]$，$[f(2)]$，…，$[f(1000)]$のうちで異なるものの個数は，

$$100+(690-460+1)-1=330$$

［解 説］

(2)では，隣接する $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が，$n=100$ を境に，1 より大から 1 より小に変化するという感覚が，個数を数えるポイントとなっています。

3

問題のページへ

(1)　二項定理を利用すると，$S_k(1)=1$，$S_k(2)=1^k+2^k$ より，

$$T_m(1)={}_m\mathrm{C}_1S_1(1)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(1)+{}_m\mathrm{C}_3S_3(1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(1)$$
$$={}_m\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_3+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}=(1+1)^m-{}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_m=2^m-2$$
$$T_m(2)={}_m\mathrm{C}_1S_1(2)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(2)+{}_m\mathrm{C}_3S_3(2)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(2)$$
$$={}_m\mathrm{C}_1(1+2^1)+{}_m\mathrm{C}_2(1+2^2)+{}_m\mathrm{C}_3(1+2^3)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(1+2^{m-1})$$
$$=T_m(1)+\{(1+2)^m-{}_m\mathrm{C}_0 2^0-{}_m\mathrm{C}_m2^m\}$$
$$=2^m-2+3^m-1-2^m=3^m-3$$

(2)　$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$ であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　(1)より成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$T_m(l)=(l+1)^m-(l+1)$ であると仮定すると，条件より，

$$T_m(l+1)={}_m\mathrm{C}_1S_1(l+1)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(l+1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(l+1)$$
$$={}_m\mathrm{C}_1\{1+2+\cdots+l+(l+1)\}+{}_m\mathrm{C}_2\{1^2+2^2+\cdots+l^2+(l+1)^2\}$$
$$+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\{1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots+l^{m-1}+(l+1)^{m-1}\}$$
$$=T_m(l)+{}_m\mathrm{C}_1(l+1)+{}_m\mathrm{C}_2(l+1)^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(l+1)^{m-1}$$
$$=(l+1)^m-(l+1)+\{(1+l+1)^m-{}_m\mathrm{C}_0(l+1)^0-{}_m\mathrm{C}_m(l+1)^m\}$$
$$=(l+1)^m-(l+1)+(l+2)^m-1-(l+1)^m=(l+2)^m-(l+2)$$

(i)(ii)より，$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)\cdots\cdots\cdots(*)$

(3)　まず，$p=3$ のときは，$S_1(2)=1+2$ は 3 の倍数となり題意を満たし，$S_k(p-1)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数である。

次に，p が 5 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$k=1$ のとき

$m=2$，$n=p-1$ とすると，条件より，$T_2(p-1)={}_2\mathrm{C}_1S_1(p-1)$

すると，$(*)$から，$(p-1+1)^2-(p-1+1)=2S_1(p-1)$

$$2S_1(p-1)=p(p-1)$$

p は 5 以上の素数より，$S_1(p-1)$ は p の倍数である。

(ii)　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ l$　$(l\leqq p-3)$ のとき

$S_k(p-1)$ が p の倍数であると仮定すると，条件より，

$$T_{l+2}(p-1)={}_{l+2}\mathrm{C}_1S_1(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_2S_2(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_3S_3(p-1)$$
$$+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_lS_l(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1}S_{l+1}(p-1)$$

$(*)$から，$T_{l+2}(p-1)=p^{l+2}-p=p(p^{l+1}-1)$ となり，

$$(l+2)S_{l+1}(p-1)=p(p^{l+1}-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_1S_1(p-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_2S_2(p-1)$$
$$-{}_{l+2}\mathrm{C}_3S_3(p-1)-\cdots-{}_{l+2}\mathrm{C}_lS_l(p-1)$$

これより，$(l+2)S_{l+1}(p-1)$ は p の倍数となる。

すると，p は 5 以上の素数で，$l+2 \leqq p-1$ から，$l+2$ と p は互いに素となるので，$S_{l+1}(p-1)$ は p の倍数である。

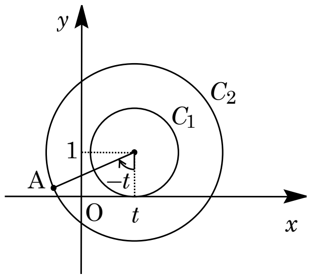
(i)(ii)より，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数である。

［解 説］

二項定理と整数の融合問題です。(3)の証明に対して，巧妙な誘導がつけられています。また，帰納法における $l \leqq p-3$ という条件から，$p=3$ は特別に扱っています。なお, (2)までは文系と共通です。

4

問題のページへ



(1)　時刻 t において，回転角が t なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t,\ 1)+2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-t\right),\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)\right)$$
$$=(t,\ 1)+2(-\sin t,\ -\cos t)$$
$$=(t-2\sin t,\ 1-2\cos t)$$

よって，$(x(t),\ y(t))=(t-2\sin t,\ 1-2\cos t)$

(2)　(1)より，$x'(t)=1-2\cos t$，$y'(t)=2\sin t$

さて，$0\leqq t\leqq 2\pi$ において，$x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減は右表のようになる。

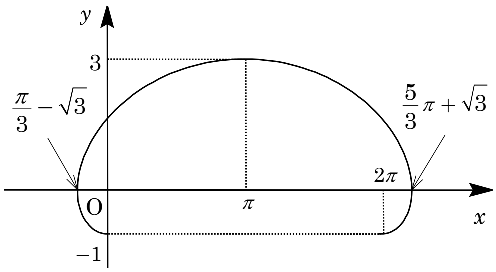
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	↘		↗	π	↗		↘	2π
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$y(t)$	-1	↗	0	↗	3	↘	0	↘	-1

$t=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$ での $x(t)$ の値は，それぞれ $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$，$\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$ である。

よって，$x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの点 A の座標は，

$(0,\ -1)$，$\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3},\ 0\right)$，$(\pi,\ 3)$，

$\left(\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3},\ 0\right)$，$(2\pi,\ -1)$



(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}}^{\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}} y\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(1-2\cos t)(1-2\cos t)\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(1-4\cos t+4\cos^2 t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(3-4\cos t+2\cos 2t)\,dt$$
$$=\Big[\,3t-4\sin t+\sin 2t\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}=4\pi+4\sqrt{3}-\sqrt{3}=4\pi+3\sqrt{3}$$

［解 説］

有名なサイクロイドと同じように考えれば，違和感もないでしょう。計算量も少なめです。