1

解答解説のページへ

原点を中心とする半径 1 の円を C とし，x 軸上に点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ をとる。ただし $a>1$ とする。P から C へ引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線が x 軸と交わる点を Q とする。

(1)　Q の x 座標を求めよ。

(2)　点 R が C 上にあるとき，$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}$ が R によらず一定であることを示し，その値を a を用いて表せ。

(3)　C 上の点 R が $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ を満たすとする。このような R の座標と線分 PR の長さを求めよ。

2　　解答解説のページへ

大小合わせて 2 個のサイコロがある。サイコロを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。

(1)　2 個のサイコロを同時に投げる。出た目の差の絶対値について，その期待値を求めよ。

(2)　2 個のサイコロを同時に投げ，出た目が異なるときはそこで終了する。出た目が同じときには小さいサイコロをもう一度だけ投げて終了する。終了時に出ている目の差の絶対値について，その期待値を求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える。

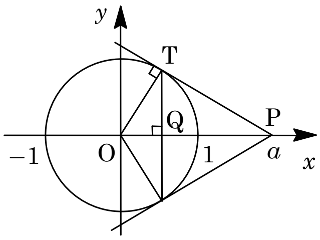
(1) 2 点 P, Q を通る直線 l の方程式を求めよ。

(2) a を定数とし，直線 $x=a$ と l の交点の y 座標を t の関数と考えて $f(t)$ とおく。t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を a を用いて表せ。

(3) t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　2 つの接点は x 軸対称の位置にあり，その一方を T とおくと，

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OT}}=\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OP}},\ \mathrm{OQ}=\frac{\mathrm{OT}^2}{\mathrm{OP}}=\frac{1}{a}$$

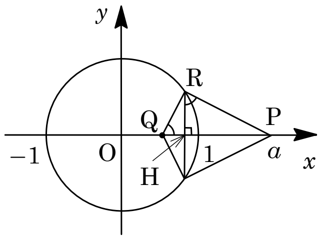
よって，Q の x 座標は $\frac{1}{a}$ である。

(2)　$\mathrm{R}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

$$\left(\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}\right)^2=\frac{(\cos\theta-a)^2+\sin^2\theta}{\left(\cos\theta-\frac{1}{a}\right)^2+\sin^2\theta}=\frac{1-2a\cos\theta+a^2}{1-\frac{2}{a}\cos\theta+\frac{1}{a^2}}=\frac{a^2(1-2a\cos\theta+a^2)}{a^2-2a\cos\theta+1}$$

$$=a^2$$

よって，$\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=a$ である。



(3)　$\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ を満たす C 上の点 R は 2 つあり，x 軸対称となっている。また，R から x 軸に垂線 RH を引く。

ここで，$\angle\mathrm{PQR}=\varphi$ とおくと $\angle\mathrm{PRH}=\varphi$ となり，(2)から $\tan\varphi=a$ より，

$$\mathrm{RH}=\mathrm{QH}\tan\varphi=a\mathrm{QH},\ \mathrm{PH}=\mathrm{RH}\tan\varphi=a^2\mathrm{QH}$$

$\mathrm{QH}+\mathrm{PH}=\mathrm{PQ}$ より，$(a^2+1)\mathrm{QH}=a-\frac{1}{a}$ となり，

$$\mathrm{QH}=\frac{a^2-1}{a(a^2+1)},\ \mathrm{RH}=\frac{a^2-1}{a^2+1}$$

また，$\mathrm{OH}=\mathrm{OQ}+\mathrm{QH}=\frac{1}{a}+\frac{a^2-1}{a(a^2+1)}=\frac{2a^2}{a(a^2+1)}=\frac{2a}{a^2+1}$ から，R の座標は，

$$\left(\frac{2a}{a^2+1},\ \frac{a^2-1}{a^2+1}\right),\ \left(\frac{2a}{a^2+1},\ -\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$$

さらに，$\mathrm{QR}=\sqrt{\mathrm{QH}^2+a^2\mathrm{QH}^2}=\sqrt{a^2+1}\,\mathrm{QH}=\frac{a^2-1}{a\sqrt{a^2+1}}$ より，

$$\mathrm{PR}=a\mathrm{QR}=\frac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}$$

［解　説］

円と直線に関する問題ですが，位置関係がはっきりしているため，平面図形の知識が援用できます。なお，どの設問もいろいろな方法が考えられます。

2

問題のページへ

(1)　2 個のサイコロを同時に投げたとき，出た目の差の絶対値についてまとめると，右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

この期待値を E_1 とすると，

$$E_1 = 0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}=\frac{35}{18}$$

(2)　2 個のサイコロを同時に投げたとき，出た目の差の絶対値が 0 以外のときは終了し，(1)と同様に期待値を計算する。

また，出た目の差の絶対値が 0 のときはもう一度だけ投げて終了し，新たに出た目との差の絶対値を考える。この場合，(1)と同様に考えると，期待値は $\frac{1}{6}E_1$ となる。

よって，終了時の出た目の差の絶対値の期待値を E_2 とすると

$$E_2 = \left(E_1 - 0\times\frac{6}{36}\right)+\frac{1}{6}E_1 = \frac{7}{6}\cdot\frac{35}{18} = \frac{245}{108}$$

［解 説］

(1)の結果がうまく利用できるように，(2)が構成されています。同じことを繰り返してもよいのですが。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　2 点 $P(t,\ t^2)$，$Q(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線 l の方程式は,

$$y-t^2=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t),\ \ y=(2t+1)x-t^2-t\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$(*)$に $x=a$ を代入し，$y=f(t)$ とおくと,

$$f(t)=(2t+1)a-t^2-t=-t^2+(2a-1)t+a=-\left(t-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{4}$$

すると，t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を求めると,

(i)　$\frac{2a-1}{2}\leqq -1\ \left(a\leqq -\frac{1}{2}\right)$ のとき　最大値は，$f(-1)=-a$

(ii)　$-1\leqq\frac{2a-1}{2}\leqq 0\ \left(-\frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{1}{2}\right)$ のとき　最大値は，$f\left(\frac{2a-1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{4}$

(iii)　$\frac{2a-1}{2}\geqq 0\ \left(a\geqq\frac{1}{2}\right)$ のとき　最大値は，$f(0)=a$

(3)　線分 PQ が通過してできる図形は，直線 l が通過してできる領域の放物線 $y=x^2$ の上側にある部分である。さて，(2)から,

(i)　$a\leqq -\frac{1}{2}$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f(-1)=-a$

(ii-i)　$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq 0$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f\left(\frac{2a-1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{4}$

(ii-ii)　$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f\left(\frac{2a-1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{4}$

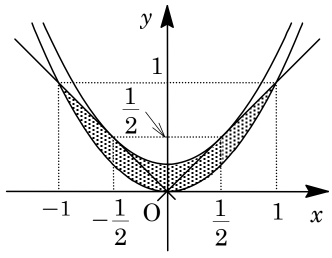
(iii)　$a\geqq\frac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f(0)=a$

(i)～(iii)より，直線 l が通過してできる領域は,

$$x\leqq y\leqq -x\ \ \left(x\leqq -\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ \ x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \ \left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 0\text{のとき}\right)$$

$$-x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \ \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ \ -x\leqq y\leqq x\ \ \left(x\geqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right)$$

以上より，線分 PQ が通過してできる図形は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。この図形の面積を S とすると，y 軸に関する対称性より,



$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}-x^2\right)dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\,dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

［解　説］

線分の通過領域の問題です。誘導の付け方が，今年の東大のほぼ文理共通題と同じようになっています。