$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1) B の中心と l との距離を求めよ。

(2) l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える。t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 C_1，C_2，C_3，…を次のように定める。

・C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する。

・正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

(1) 等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。

(2) すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を一組与えよ。

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ。

4

解答解説のページへ

負でない整数 N が与えられたとき，$a_1=N$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として数列 $\{a_n\}$ を定める。ただし $[a]$ は，実数 a の整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を表す。

(1)　$a_3=1$ となるような N をすべて求めよ。

(2)　$0 \leqq N < 2^{10}$ を満たす整数 N のうちで，N から定まる数列 $\{a_n\}$ のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。

(3)　0 から $2^{100}-1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び，数列 $\{a_n\}$ を定める。次の条件(＊)を満たす最小の正の整数 m を求めよ。

　(＊)　数列 $\{a_n\}$ のある項が m となる確率が $\dfrac{1}{100}$ 以下となる。

1

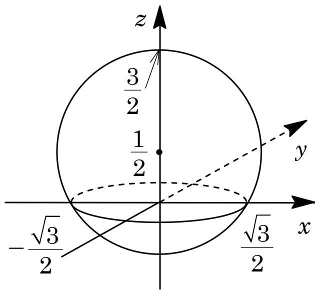
問題のページへ

(1)　半径 1 の球 B の中心から直線 l に垂線を下ろすと，その足は長さ $\sqrt{3}$ の線分の中点となり，B の中心と l との距離 d は,

$$d=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

(2)　直線 l を x 軸とすると，(1)から B の球面は,

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1 \cdots\cdots\cdots ①$$



さて，B を x 軸に垂直な平面 $x=k$ ……②で切断したときの断面は，①②を連立して,

$$y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1-k^2$$

これより，断面は平面 $x=k$ 上で，点 $\left(k,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円であることがわかる。なお，yz 平面に関する対称性より，以下，$0\leqq k\leqq 1$ で考える。

(i)　$0\leqq k\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

断面を平面 $x=k$ 上で，x 軸のまわりに 1 回転すると，半径 $\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}$ の円板となり，その面積 $S(k)$ は,

$$S(k)=\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right)^2=\pi\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)$$

(ii)　$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq k\leqq 1$ のとき

断面を平面 $x=k$ 上で，x 軸のまわりに 1 回転すると，外径 $\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}$ で内径 $\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}$ のドーナツ形となり，その面積 $S(k)$ は,

$$S(k)=\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}\right)^2=2\pi\sqrt{1-k^2}$$

(i)(ii)より，求める立体の体積を V とすると，対称性を考えて,

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)dk+2\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}2\sqrt{1-k^2}\,dk$$

$$=2\pi\left[\frac{5}{4}k-\frac{k^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+2\pi\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+4\pi\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sqrt{3}\pi+\pi\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\pi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

［解　説］

立体の回転体の求積についての頻出問題です。要演習の 1 題です。

2　問題のページへ

2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線 l の方程式は,

$$y-t^2=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t),\ \ y=(2t+1)x-t^2-t\cdots\cdots\cdots(*)$$

まず, $(*)$の x の値を $x=a$ と固定し, y のとり得る値の範囲を求める。

ここで, $y=f(t)$ とおくと,

$$f(t)=(2t+1)a-t^2-t=-t^2+(2a-1)t+a=-\left(t-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{4}$$

さて, t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき,

(i)　$a\leqq-\dfrac{1}{2}$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f(-1)=-a$

(ii)　$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 0$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f\left(\dfrac{2a-1}{2}\right)=a^2+\dfrac{1}{4}$

(iii)　$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f\left(\dfrac{2a-1}{2}\right)=a^2+\dfrac{1}{4}$

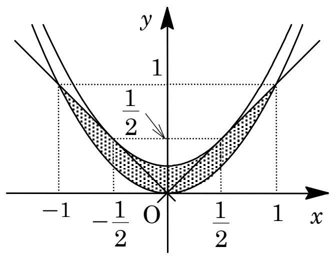
(iv)　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f(0)=a$

(i)～(iv)より, 直線 l が通過してできる領域は,

$$x\leqq y\leqq -x\ \ \left(x\leqq-\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ \ x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \ \left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 0\text{のとき}\right)$$

$$-x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \ \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ \ -x\leqq y\leqq x\ \ \left(x\geqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right)$$

これを利用すると, 線分 PQ が通過してできる図形は, 直線 l が通過してできる領域の放物線 $y=x^2$ の上側にある部分なので, 図示すると右図の網点部である。ただし, 境界は領域に含む。この図形の面積 S は, y 軸に関する対称性より,



$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}-x^2\right)dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\,dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

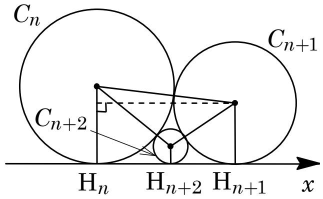
［解　説］

線分の通過領域についての頻出問題です。文系と同一内容ですが, 理系では誘導が付いていません。

3

問題のページへ

(1) 円 C_n，C_{n+1}，C_{n+2} の中心から x 軸に垂線を下ろし，その足をそれぞれ H_n，H_{n+1}，H_{n+2} とおくと，



$$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}=\sqrt{(r_n+r_{n+1})^2-(r_n-r_{n+1})^2}=2\sqrt{r_nr_{n+1}}$$

同様にして，$\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}=2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$

$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2}=2\sqrt{r_nr_{n+2}}$

すると，$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}=\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}+\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2}$ より，

$$2\sqrt{r_nr_{n+1}}=2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}+2\sqrt{r_nr_{n+2}}$$

両辺を $2\sqrt{r_nr_{n+1}r_{n+2}}$ で割って，$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ ………①

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}=a_n$ とおくと，$r_1=r_2=1$ から $a_1=a_2=1$ となり，①より，

$$a_{n+2}=a_n+a_{n+1},\quad a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解を $x=p,\ q\ (p<q)$ とおくと，$p=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

すると，②を変形して，$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$ から，

$$a_{n+1}-pa_n=(a_2-pa_1)q^{n-1}=(1-p)q^{n-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}q^{n-1}=q^n\ \cdots\cdots\cdots③$$

同様に，②より，$a_{n+2}-qa_{n+1}=p(a_{n+1}-qa_n)$ となり，

$$a_{n+1}-qa_n=(a_2-qa_1)p^{n-1}=(1-q)p^{n-1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}p^{n-1}=p^n\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(-p+q)a_n=-p^n+q^n$ から，$a_n=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}p^n+\dfrac{1}{\sqrt{5}}q^n$

すると，条件から $a_n=s\alpha^n+t\beta^n$ なので，定数 α，β，s，t の値の 1 つとして，

$$\alpha=p=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad \beta=q=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad s=-\frac{1}{\sqrt{5}},\quad t=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(3) (2)より，$r_n=\dfrac{1}{(s\alpha^n+t\beta^n)^2}$ より，$\dfrac{r_n}{k^n}=\dfrac{1}{k^n(s\alpha^n+t\beta^n)^2}$

まず，$k\leqq 0$ のとき，明らかに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}$ が正の値に収束する場合はない。

そこで，$k>0$ として，$\dfrac{r_n}{k^n}=\dfrac{1}{\{s(\sqrt{k}\alpha)^n+t(\sqrt{k}\beta)^n\}^2}$

さて，$|\alpha|<1<|\beta|$ より，$|\sqrt{k}\alpha|<\sqrt{k}<|\sqrt{k}\beta|=\sqrt{k}\beta$ となり，

(i) $\sqrt{k}\beta>1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}=0$ となり，正の値に収束しない。

(ii)　$0 < \sqrt{k}\beta < 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n} = \infty$ となり，正の値に収束しない。

(iii)　$\sqrt{k}\beta = 1\ \left(\sqrt{k} = \dfrac{1}{\beta}\right)$ のとき

このとき，$\dfrac{r_n}{k^n} = \dfrac{1}{\left\{s\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n + t\right\}^2}$ となり，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n} = \frac{1}{t^2} = 5$

(i)〜(iii)より，数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するのは，$k = \dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のときであり，このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n} = 5$ である。

［解　説］

ときどき見かける有名な構図の問題で，(2)までは定番といってもよいものです。

4

問題のページへ

(1)　$a_1=N\geqq 0$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$に対して，$a_3=1$とすると，$\left[\dfrac{a_2}{2}\right]=1$から$a_2=2,\ 3$

すると，$a_2=2$のとき$\left[\dfrac{a_1}{2}\right]=2$から$a_1=4,\ 5$，$a_2=3$のとき$\left[\dfrac{a_1}{2}\right]=3$から

$a_1=6,\ 7$となり，まとめると，$a_1=N=4,\ 5,\ 6,\ 7$である。

(2)　一般的に，負でない整数$i,\ j\ (i<j)$に対して，$i\leqq\left[\dfrac{x}{2}\right]<j$を満たす整数$x$は,

$$x=2i\,,\ 2i+1\,,\ 2i+2\,,\ \cdots,\ 2j-1$$

すなわち，$2i\leqq x<2j$となり，$2j-2i$個のxが存在する。

さて，ある正の整数lに対して，$a_l=2$とすると，$a_{l-1}=4,\ 5$となり，

$$4\leqq a_{l-1}<6\,,\ 8\leqq a_{l-2}<12\,,\ 16\leqq a_{l-3}<24\,,\ \cdots,\ 2^l\leqq a_1<3\cdot 2^{l-1}$$

ここで，条件から$0\leqq N<2^{10}$すなわち$0\leqq a_1<2^{10}$より，$l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$

よって，$a_l=2$となる整数Nの個数は,

$$\sum_{l=1}^{9}(3\cdot 2^{l-1}-2^l)=\sum_{l=1}^{9}2^{l-1}=\frac{2^9-1}{2-1}=511$$

(3)　ある正の整数lに対して，$a_l=m$とすると，$a_{l-1}=2m,\ 2m+1$となり，

$$2m\leqq a_{l-1}<2(m+1)\,,\ 4m\leqq a_{l-2}<4(m+1)\,,\ \cdots,\ 2^{l-1}m\leqq a_1<2^{l-1}(m+1)$$

さて，$0\leqq N\leqq 2^{100}-1$において，$2^{l-1}m\leqq 2^{100}-1<2^{l-1}(m+1)-1$と仮定すると，

$$m\leqq 2^{101-l}-\frac{1}{2^{l-1}}<m+1-\frac{1}{2^{l-1}}$$

まとめると，$m\leqq 2^{101-l}-\dfrac{1}{2^{l-1}}$かつ$m>2^{101-l}-1$となり，これを満たす整数 m は

存在しない。これより，$a_l=m$となる確率は，整数Nの個数に注目して,

$$\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=1}^{l}\{2^{k-1}(m+1)-2^{k-1}m\}=\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=1}^{l}2^{k-1}=\frac{1}{2^{100}}\cdot\frac{2^l-1}{2-1}=\frac{2^l-1}{2^{100}}$$

条件から，$\dfrac{2^l-1}{2^{100}}\leqq\dfrac{1}{100}$より，$2^l\leqq\dfrac{2^{100}}{100}+1=\dfrac{128}{100}\cdot 2^{93}+1=\dfrac{32}{25}\cdot 2^{93}+1$となり，

$$l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 93$$

よって，$1\leqq l\leqq 93$のとき$0\leqq N\leqq 2^{100}-1$に含まれ，$l\geqq 94$のとき$N>2^{100}-1$とな

ることから，求める正の整数mの条件は,

$$2^{100}-1<2^{93}m$$

すると，mの最小値は$m>2^7-\dfrac{1}{2^{93}}$より，$m=2^7=128$である。

［解　説］

(1)(2)は実験で具体的に計算すればよいだけですが，それをベースにした(3)の設問はかなり難度が高く，記述も容易とはいえないものになっています。