1

解答解説のページへ

座標平面上の円 $C: x^2+(y-1)^2=1$ と，x 軸上の 2 点 $\mathrm{P}(-a,\ 0)$，$\mathrm{Q}(b,\ 0)$ を考える。ただし，$a>0$，$b>0$，$ab\neq 1$ とする。点 P，Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き，その 2 つの接線の交点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 QR の方程式を求めよ。

(2) R の座標を a, b で表せ。

(3) R の y 座標が正であるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の周の長さを T とする。T を a, b で表せ。

(4) 2 点 P，Q が，条件「$\mathrm{PQ}=4$ であり，R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき，T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき,

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば, 確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k=2,\ 3,\ 4) \text{ にあるならば, 確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に, 確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば, 確率 1 で点 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す。試行を n 回繰り返した後に，石が点 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ にある確率を $P_n(k)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$n=6$ のときの確率 $P_6(k)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ をそれぞれ求めよ。

(2)　石が移動した先の点に印をつける(点 1 には初めから印がついているものとする)。試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3)　$n \geqq 1$ のとき，$P_n(3)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

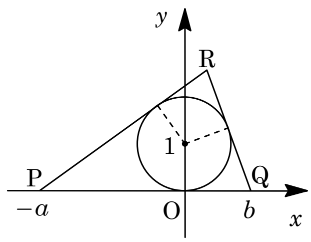
(1)　$\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2$ を計算し，2 重根号を用いない形で表せ。

(2)　$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ。

(3)　8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ （ただし，複号±はすべての可能性にわたる）の中で，(2)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求めよ。

1

問題のページへ



(1)　直線 QR は x 軸に平行でないので，その法線ベクトルの成分を$(1,\ m)$とおくと，その方程式は，

$$(x-b)+my=0\,,\ \ x+my-b=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

①は，円$C:x^2+(y-1)^2=1$に接することより，

$$\frac{|m-b|}{\sqrt{1+m^2}}=1\,,\ \ (m-b)^2=1+m^2$$

よって，$2bm=b^2-1$より，$m=\dfrac{b^2-1}{2b}$となり，①に代入すると，

$$x+\frac{b^2-1}{2b}y-b=0\,,\ \ 2bx+(b^2-1)y-2b^2=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2)　直線 PR の方程式は，(1)の結果から，$-2ax+(a^2-1)y-2a^2=0\ \cdots\cdots\cdots③$

②③を連立すると，$\{a(b^2-1)+b(a^2-1)\}y=2ab^2+2a^2b$となり，

$$\{ab(a+b)-(a+b)\}y=2ab(a+b)\,,\ \ y=\frac{2ab}{ab-1}\ \ (ab\neq1\,,\ a+b>0)$$

②に代入すると，$2bx+\dfrac{2ab}{ab-1}(b^2-1)-2b^2=0$となり，

$$x+\frac{a}{ab-1}(b^2-1)-b=0\,,\ \ x=-\frac{a}{ab-1}(b^2-1)+b=\frac{a-b}{ab-1}$$

これより，$\mathrm{R}\left(\dfrac{a-b}{ab-1},\ \dfrac{2ab}{ab-1}\right)$である。

(3)　R の y 座標が正より，$\dfrac{2ab}{ab-1}>0$すなわち$ab>1$であり，このとき，

$$\mathrm{QR}^2=\left(\frac{a-b}{ab-1}-b\right)^2+\left(\frac{2ab}{ab-1}\right)^2=\frac{a^2(1-b^2)^2+4a^2b^2}{(ab-1)^2}=\frac{a^2(1+b^2)^2}{(ab-1)^2}$$

よって，$\mathrm{QR}=\dfrac{a(1+b^2)}{ab-1}$となり，同様にすると$\mathrm{PR}=\dfrac{b(1+a^2)}{ab-1}$となる。

そこで，$\triangle\mathrm{PQR}$の周の長さを T とすると，$\mathrm{PQ}=a+b$より，

$$T=a+b+\frac{a(1+b^2)}{ab-1}+\frac{b(1+a^2)}{ab-1}=\frac{2ab(a+b)}{ab-1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(4)　$\mathrm{PQ}=4$で R の y 座標が正より，$a+b=4$，$ab>1$である。

ここで，$\sqrt{ab}\leqq\dfrac{a+b}{2}=2$より$ab\leqq4$となり，$1<ab\leqq4$である。すると，④から，

$$T=\frac{8ab}{ab-1}=\frac{8}{1-\dfrac{1}{ab}}\geqq\frac{8}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{32}{3}$$

これより，$ab=4\ (a=b=2)$のとき T は最小値$\dfrac{32}{3}$をとる。

［解 説］

別解もいろいろ可能な円と直線に関する標準的な問題です。特に(3)は……。

© 電送数学舎 2015

2

問題のページへ

(1)　与えられた試行により，石が点kにある確率を$P_n(k)$とすると，

$$P_{n+1}(1)=\frac{1}{2}P_n(2),\ P_{n+1}(2)=P_n(1)+\frac{1}{2}P_n(3),\ P_{n+1}(3)=\frac{1}{2}P_n(2)+\frac{1}{2}P_n(4)$$

$$P_{n+1}(4)=\frac{1}{2}P_n(3)+P_n(5),\ P_{n+1}(5)=\frac{1}{2}P_n(4)$$

初めは，石が点 1 にあることより，漸化式を適用すると，

$$P_1(1)=0,\ P_1(2)=1,\ P_1(3)=0,\ P_1(4)=0,\ P_1(5)=0$$

$$P_2(1)=\frac{1}{2},\ P_2(2)=0,\ P_2(3)=\frac{1}{2},\ P_2(4)=0,\ P_2(5)=0$$

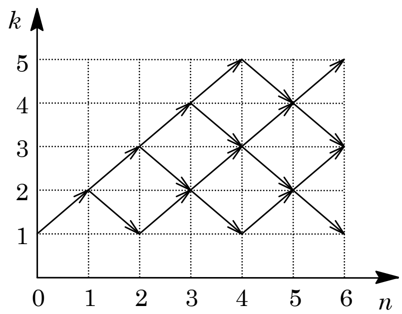
$$P_3(1)=0,\ P_3(2)=\frac{3}{4},\ P_3(3)=0,\ P_3(4)=\frac{1}{4},\ P_3(5)=0$$

$$P_4(1)=\frac{3}{8},\ P_4(2)=0,\ P_4(3)=\frac{1}{2},\ P_4(4)=0,\ P_4(5)=\frac{1}{8}$$

$$P_5(1)=0,\ P_5(2)=\frac{5}{8},\ P_5(3)=0,\ P_5(4)=\frac{3}{8},\ P_5(5)=0$$

$$P_6(1)=\frac{5}{16},\ P_6(2)=0,\ P_6(3)=\frac{1}{2},\ P_6(4)=0,\ P_6(5)=\frac{3}{16}$$

(2)　試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点にすべてに印がついているのは，右図より，



(i)　4 回目に 5 のとき　5 回目以降は任意なので，その確率は$P_4(5)\cdot 1=\dfrac{1}{8}$となる。

(ii)　4 回目に 3 のとき　5 回目に 4 で，6 回目に 5 より，その確率は$P_4(3)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$である。

(3)　(1)より，$P_{n+1}(3)=\dfrac{1}{2}P_n(2)+\dfrac{1}{2}P_n(4)=\dfrac{1}{2}\{P_n(2)+P_n(4)\}\cdots\cdots\cdots(*)$

さて，与えられた条件より，石の位置は，奇数回目には点 2 または点 4，偶数回目には点 1 または点 3 または点 5 にある。これより，

$$P_n(2)+P_n(4)=0\ \ (n\text{ が偶数}),\ P_n(2)+P_n(4)=1\ \ (n\text{ が奇数})$$

すると，(*)から，$P_n(3)=0$　(n が奇数)，$P_n(3)=\dfrac{1}{2}$　(n が偶数)

［解 説］

確率と漸化式の融合問題です。ただ，漸化式を解くというわけではなく，具体的な(1)を誘導として考えていくタイプです。なお，(3)の石の位置についての記述は結論だけですが，丁寧に行うならば漸化式を用います。

© 電送数学舎 2015

3

問題のページへ

(1) $(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}})^2=9+2\sqrt{17}+9-2\sqrt{17}+2\sqrt{9^2-2^2\cdot 17}=18+2\sqrt{13}$

(2) $\alpha-\sqrt{13}=\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ より，両辺を 2 乗すると，(1)から，

$\alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13}$，$\alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$

さらに，両辺を 2 乗すると，$\alpha^4-10\alpha^2+25=52(\alpha^2+2\alpha+1)$ となり，

$\alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$

よって，α は 4 次方程式 $x^4-62x^2-104x-27=0$ の解である。

(3) (2)より，$f(x)=x^4-62x^2-104x-27$ であり，

$$f(x)=(x^2-5)^2-\{2\sqrt{13}(x+1)\}^2$$
$$=\{x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)\}\{x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)\}$$

ここで，$f(x)=0$ とすると，

$x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)=0$ ……①，$x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)=0$ ……②

①より，$x^2-2\sqrt{13}x-2\sqrt{13}-5=0$ となり，

$$x=\sqrt{13}\pm\sqrt{18+2\sqrt{13}}=\sqrt{13}\pm(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}})$$

②より，$x^2+2\sqrt{13}x+2\sqrt{13}-5=0$ となり，

$$x=-\sqrt{13}\pm\sqrt{18-2\sqrt{13}}=-\sqrt{13}\pm(\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}})$$

以上より，方程式 $f(x)=0$ の解は，

$\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$

$-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$

［解　説］

高次方程式の問題です。(2)はよくみかけるものですが，そのプロセスを誘導として(3)に適用させるところが，問題のねらいになっています。

© 電送数学舎 2015