1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=x^{-2}2^{x}\quad(x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2)　方程式 $2^{x}=x^{2}$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $2^{x}=x^{2}$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ。

(2)　8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ （ただし，複号±はすべての可能性にわたる）の中で，(1)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ。

(3)　(2)で求めた $f(x)=0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ。

3

解答解説のページへ

e を自然対数の底とし，t を $t>e$ となる実数とする。このとき，曲線 $C: y=e^x$ と直線 $y=tx$ は相異なる 2 点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする。また，P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし，曲線 C，x 軸および 2 つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，曲線 C および 2 つの直線 PR，QR で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ。

(2)　$\alpha<\dfrac{e}{t}$，$\beta<2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。必要ならば，$x>0$ のとき $e^x>x^2$ であることを証明なしに用いてよい。

4

解答解説のページへ

数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき,

$$\begin{cases} \text{石が点 } 1 \text{ にあるならば, 確率 } 1 \text{ で点 } 2 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k=2,\ 3,\ 4) \text{ にあるならば, 確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に, 確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 } 5 \text{ にあるならば, 確率 } 1 \text{ で点 } 4 \text{ に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す。また，石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 試行を 6 回繰り返した後に，石が点 k ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$) にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回($n \geqq 1$)繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$f(x)=x^{-2}2^x=\dfrac{2^x}{x^2}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{2^x\log 2\cdot x^2-2^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{2^x(x\log 2-2)}{x^3}=\frac{2^x}{x^2}\cdot\frac{x\log 2-2}{x}$$

これより，$f'(x)>0$ となる条件は，$\dfrac{x\log 2-2}{x}>0$ すなわち $x(x\log 2-2)>0$ から，$x<0$，$\dfrac{2}{\log 2}<x$ である。

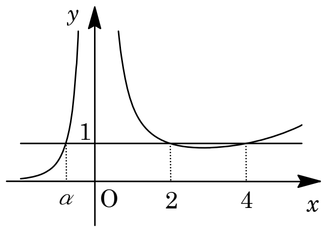
(2)　$x=0$ は方程式 $2^x=x^2$ を満たさないので，この方程式は，$x^{-2}2^x=1$ すなわち $f(x)=1$ と同値である。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

さて，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to 0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

さらに，$f(2)=f(4)=1$ に注意して，$y=f(x)$ と $y=1$ のグラフをかくと右図のようになる。



したがって，$f(x)=1$ すなわち $2^x=x^2$ は，相異なる 3 個の実数解 $x=\alpha$，2，4 をもつ。

(3)　まず，方程式 $2^x=x^2$ の解 $x=2$，4 は有理数なので，もう 1 つの負の解 $x=\alpha$ について有理数かどうかを調べる。

そこで，α が有理数と仮定し，$\alpha=-\dfrac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数)とおくと，

$$2^{-\frac{n}{m}}=\left(-\frac{n}{m}\right)^2,\ 2^{-n}=\left(\frac{n^2}{m^2}\right)^m,\ \frac{1}{2^n}=\frac{n^{2m}}{m^{2m}}$$

m, n は互いに素より，$n^{2m}=1$ ……①，$m^{2m}=2^n$ ……②

①より $n=1$ となり，②に代入すると $m^{2m}=2$ であるが，この式を満たす自然数 m は存在しない。これより，α は有理数でない。

以上より，方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものは $x=2$，4 である。

［解 説］

微分の応用に関する問題です。(2)は(1)を誘導とした解法ですが，これを無視して直接的に $y=2^x$ と $y=x^2$ のグラフを描くことによって示しても構いません。実際，$x=2$，4 という解はこちらの方法で見つけていますので。

2

問題のページへ

(1)　$\alpha-\sqrt{13}=\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ より，両辺を 2 乗すると，

$$(\alpha-\sqrt{13})^2=\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2,\ \alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13}$$

まとめると，$\alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$ となり，さらに両辺を 2 乗すると，

$$\alpha^4-10\alpha^2+25=52(\alpha^2+2\alpha+1),\ \alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$$

よって，α は 4 次方程式 $x^4-62x^2-104x-27=0$ の解である。

(2)　(1)より，$f(x)=x^4-62x^2-104x-27$ であり，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-5)^2-\{2\sqrt{13}(x+1)\}^2\\&=\{x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)\}\{x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)\}\end{aligned}$$

ここで，$f(x)=0$ とすると，

$$x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)=0\cdots\cdots①,\ x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)=0\cdots\cdots②$$

①より，$x^2-2\sqrt{13}x-2\sqrt{13}-5=0$ となり，

$$x=\sqrt{13}\pm\sqrt{18+2\sqrt{13}}=\sqrt{13}\pm\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)$$

②より，$x^2+2\sqrt{13}x+2\sqrt{13}-5=0$ となり，

$$x=-\sqrt{13}\pm\sqrt{18-2\sqrt{13}}=-\sqrt{13}\pm\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)$$

以上より，4 次方程式 $f(x)=0$ の 4 個の解は，

$$\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}},\ \sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

$$-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},\ -\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

そして，$f(x)=0$ の解の個数は 4 なので，上記以外の数は解ではない。

(3)　(2)より $\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$\beta=\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$\gamma=-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$\delta=-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおく。

すると，$8<2\sqrt{17}<9$ より，$\sqrt{17}<\sqrt{9+2\sqrt{17}}<\sqrt{18}$，$0<\sqrt{9-2\sqrt{17}}<1$ となり，

$$\alpha-\gamma=2\sqrt{13}+2\sqrt{9-2\sqrt{17}}>0,\ \gamma-\beta=-2\sqrt{13}+2\sqrt{9+2\sqrt{17}}>0$$

$$\beta-\delta=2\sqrt{13}-2\sqrt{9-2\sqrt{17}}>0$$

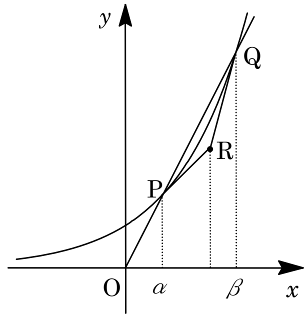
よって，α，β，γ，δ の大小関係は，$\alpha>\gamma>\beta>\delta$ である。

［解 説］

高次方程式の問題です。(1)はよくみかけるものですが，そのプロセスを誘導として(2)に適用させるところが，問題のねらいになっています。なお，(3)の大小関係については，予め図を書いて予測しています。

3

問題のページへ



(1)　$C: y=e^x$ と直線 $y=tx\ (t>e)$ の交点 P, Q の x 座標が α，β より，$e^{\alpha}=t\alpha$，$e^{\beta}=t\beta$ ………①

すると，曲線 C, x 軸および 2 つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれる部分の面積 S_1 は，①を利用すると，

$$S_1=\int_{\alpha}^{\beta}e^x dx=\left[e^x\right]_{\alpha}^{\beta}=e^{\beta}-e^{\alpha}=t(\beta-\alpha)$$

さて，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ e^{\alpha})$ における接線は，$y'=e^x$ より，

$$y-e^{\alpha}=e^{\alpha}(x-\alpha),\quad y=e^{\alpha}x+(1-\alpha)e^{\alpha}$$

よって，①より，$y=t\alpha x+t\alpha(1-\alpha)$ ………②

同様にして，点 $\mathrm{Q}(\beta,\ e^{\beta})$ における接線は，$y=t\beta x+t\beta(1-\beta)$ ………③

③－②より，$t(\beta-\alpha)x+t\beta(1-\beta)-t\alpha(1-\alpha)=0$ となり，

$$x=-\frac{\beta(1-\beta)-\alpha(1-\alpha)}{\beta-\alpha}=-\frac{\beta-\alpha-(\beta^2-\alpha^2)}{\beta-\alpha}=-1+\alpha+\beta$$

②より，$y=t\alpha(-1+\alpha+\beta)+t\alpha(1-\alpha)=t\alpha\beta$

すると，②と③の交点 R の座標は，$\mathrm{R}(-1+\alpha+\beta,\ t\alpha\beta)$ となり，これより曲線 C および 2 つの直線 PR, QR で囲まれる部分の面積 S_2 は，

$$\begin{aligned}S_2&=S_1-\frac{1}{2}(t\alpha+t\alpha\beta)(-1+\alpha+\beta-\alpha)-\frac{1}{2}(t\alpha\beta+t\beta)(\beta+1-\alpha-\beta)\\&=t(\beta-\alpha)-\frac{t}{2}\alpha(-1+\beta^2)-\frac{t}{2}\beta(1-\alpha^2)\\&=t(\beta-\alpha)-\frac{t}{2}(\beta-\alpha)-\frac{t}{2}\alpha\beta(\beta-\alpha)=\frac{t}{2}(\beta-\alpha)-\frac{t}{2}\alpha\beta(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

以上より，$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t(\beta-\alpha)-t\alpha\beta(\beta-\alpha)}{t(\beta-\alpha)}=\dfrac{1}{2}(1-\alpha\beta)$ となる。

(2)　$f(x)=e^x-tx$ とおくと，$f'(x)=e^x-t$ となり，$x>0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\log t$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘		↗

すると，$t>e$ から，

$$f(\log t)=t-t\log t=t(1-\log t)<0$$

これより，$0<\alpha<\log t$，$\log t<\beta$ となる。

さて，$f\left(\dfrac{e}{t}\right)=e^{\frac{e}{t}}-e=e^{\frac{e}{t}}-e^1<0$ より，$0<\alpha<\dfrac{e}{t}$ ……④となる。

また，$t>0$ のとき $e^t>t^2$ より，$f(2\log t)=t^2-2t\log t=t(\log e^t-\log t^2)>0$ となり，$\log t<\beta<2\log t$ ……⑤である。

④⑤より，$0<\alpha\beta<2e\cdot\dfrac{\log t}{t}$ ………⑥

ここで，$u>0$ のとき $e^u>u^2$ から $\dfrac{e^u}{u}>u$ となり，$0<\dfrac{u}{e^u}<\dfrac{1}{u}$ から $\displaystyle\lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^u}=0$

さらに，$t=e^u$ とおくと，$u\to\infty$ のとき $t\to\infty$ となり，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$

よって，⑥から，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\alpha\beta=0$ となり，

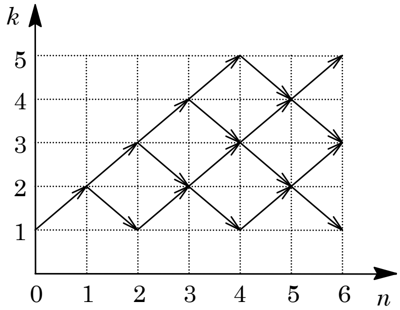
$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(1-\alpha\beta)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

［解 説］

微積分の総合問題です。計算量はかなりのもので，①の関係式を積極的に利用することがポイントになっています。なお，(2)の後半で，極限に関して丁寧に記述していますが，これは問題文を意識した結果です。

4

問題のページへ



(1) 与えられた試行により，石が点kにある確率を$P_n(k)$とすると，初めは点 1 にあることより，右図より計算すると，

$P_1(1)=0$，$P_1(2)=1$，$P_1(3)=0$，

$P_1(4)=0$，$P_1(5)=0$

$P_2(1)=\frac{1}{2}$，$P_2(2)=0$，$P_2(3)=\frac{1}{2}$，

$P_2(4)=0$，$P_2(5)=0$

$P_3(1)=0$，$P_3(2)=\frac{3}{4}$，$P_3(3)=0$，$P_3(4)=\frac{1}{4}$，$P_3(5)=0$

$P_4(1)=\frac{3}{8}$，$P_4(2)=0$，$P_4(3)=\frac{1}{2}$，$P_4(4)=0$，$P_4(5)=\frac{1}{8}$

$P_5(1)=0$，$P_5(2)=\frac{5}{8}$，$P_5(3)=0$，$P_5(4)=\frac{3}{8}$，$P_5(5)=0$

$P_6(1)=\frac{5}{16}$，$P_6(2)=0$，$P_6(3)=\frac{1}{2}$，$P_6(4)=0$，$P_6(5)=\frac{3}{16}$

(2) 試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点にすべてに印がついているのは，

(i) 4 回目に 5 のとき　5 回目以降は任意なので，その確率は$P_4(5)\cdot 1=\frac{1}{8}$となる。

(ii) 4 回目に 3 のとき　5 回目に 4 で，6 回目に 5 のときだけなので，その確率は$P_4(3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$である。

(3) まず，試行をn回繰り返した後に，印が 3 つの点についているとき，点 1 と 2 は必ず印がつくことより，印のつく 3 つの点は 1 と 2 と 3 である。言い換えると，点 3 に少なくとも 1 回印がつき，点 4 と 5 には印がつかない場合となる。

さて，点 2→点 3→点 2 となる確率は$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，点 2→点 1→点 2 となる確率は$\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$である。これより，点 1 と 2 と 3 に印がつく確率は，lを自然数として，

(i) nが奇数$(n=2l+1)$のとき　$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)^l-\left(\frac{1}{2}\right)^l=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

なお，$n=1$のときも成立している。

(ii) nが偶数$(n=2l)$のとき　$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)^{l-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^l=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

［解 説］

頻出のランダムウォークが題材になっている確率の問題です。具体的な(1)を誘導として考えていくタイプです。