1　解答解説のページへ

曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-1$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

2

解答解説のページへ

n を正の整数とし，k を$1 \leqq k \leqq n+2$を満たす整数とする。$n+2$枚のカードがあり，そのうちの1枚には数字0が，他の1枚には数字2が，残りのn枚には数字1が書かれている。この$n+2$枚のカードのうちから無作為に k 枚のカードを取り出すとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 1 以上になる確率を求めよ。

(2)　取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 2 となる確率$Q_n(k)$を求めよ。

(3)　与えられた n に対して，確率$Q_n(k)$が最大となる k の値と，その最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

正の整数 n に対して，その(1 と自分自身も含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ とかくことにする。このとき，次の問いに答えよ。

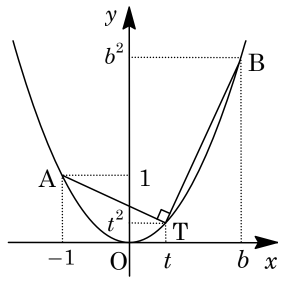
(1) k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ。

(2) $s(2016)$ を求めよ。

(3) 2016 の正の約数 n で，$s(n)=2016$ となるものをすべて求めよ。

1

問題のページへ



$\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{T}(t,\ t^2)\ (-1<t<b)$に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(t+1,\ t^2-1)=(t+1)(1,\ t-1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，あるtに対して，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BT}}$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BT}}=0,\ 1+(t-1)(t+b)=0$$
$$t^2+(b-1)t-b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$(*)$を満たすtが$-1<t<b$に少なくとも1つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-1)t-b+1=\left(t+\dfrac{b-1}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+2b-3}{4}$とおくと，

$$f(-1)=-2b+3,\ f(b)=2b^2-2b+1=2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

(i)　$-2b+3\geqq0\ \left(-1<b\leqq\dfrac{3}{2}\right)$のとき

$(*)$を満たす t が$-1<t<b$に少なくとも 1 つ存在する条件は，$f(-1)\geqq0$かつ$f(b)>0$より，

$$-1<-\frac{b-1}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\ -\frac{b^2+2b-3}{4}\leqq0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-1<2$となり，$\dfrac{1}{3}<b<3$

②より，$(b+3)(b-1)\geqq0$となり，$b\leqq-3,\ 1\leqq b$

よって，$-1<b\leqq\dfrac{3}{2}$と合わせると，$1\leqq b\leqq\dfrac{3}{2}$となる。

(ii)　$-2b+3<0\ \left(b>\dfrac{3}{2}\right)$のとき

$f(-1)<0$かつ$f(b)>0$より，$(*)$を満たすtが$-1<t<b$に存在する。

(i)(ii)より，求める条件は，$b\geqq1$である。

［解 説］

図形的な条件を数式化した後は，2 次方程式の解の配置の問題になります。ここでは，$f(b)>0$を見つけることがポイントとなっています。

2

問題のページへ

(1)　数字 0, 数字 2, 数字 1 のカードがそれぞれ 1 枚, 1 枚, n 枚の合計 $n+2$ 枚あり，そのうちから k 枚のカードを取り出す ${}_{n+2}\mathrm{C}_k$ 通りが同様に確からしいとする。

このとき, k 枚のカードの数字の積が 1 以上になるのは, 数字 0 以外の $n+1$ 枚のカードから k 枚取り出す場合より，その確率は,

$$\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{{}_{n+2}\mathrm{C}_k}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\cdot\frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!}=\frac{n+2-k}{n+2}$$

(2)　k 枚のカードの数字の積が 2 になるのは, 数字 2 のカード 1 枚と数字 1 のカードを $k-1$ 枚取り出す場合より，その確率 $Q_n(k)$ は，$k\leqq n+1$ のとき,

$$Q_n(k)=\frac{1\times{}_n\mathrm{C}_{k-1}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\cdot\frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!}=\frac{k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$$

なお，$k=n+2$ をあてはめると $Q_n(k)=0$ となり，このときも成立している。

(3)　(2)より，$Q_n(k)=\dfrac{-k^2+(n+2)k}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left\{-\left(k-\dfrac{n+2}{2}\right)^2+\dfrac{(n+2)^2}{4}\right\}$

(i)　n が偶数のとき　$Q_n(k)$ は $k=\dfrac{n+2}{2}$ のとき最大となり，最大値は,

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{(n+2)^2}{4}=\frac{n+2}{4(n+1)}$$

(ii)　n が奇数のとき　$Q_n(k)$ は $k=\dfrac{n+1}{2}$, $\dfrac{n+3}{2}$ のとき最大となり，最大値は,

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{-1+(n+2)^2}{4}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{4}=\frac{n+3}{4(n+2)}$$

［解　説］

確率についての基本的な問題です。なお, (3)の解答例については平方完成で処理しましたが，$\dfrac{Q_n(k+1)}{Q_n(k)}$ の値と 1 との大小関係を利用して，$Q_n(k)$ の増減を調べるという有名な方法もあります。

3　　問題のページへ

(1)　k を正の整数, p を 3 以上の素数とするとき，$2^k p$ の正の約数は,

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^k,\ p,\ 2p,\ 2^2p,\ \cdots,\ 2^kp$$

したがって, その和 $s(2^kp)$ は,

$$s(2^kp)=(1+2+2^2+\cdots+2^k)(1+p)=\frac{2^{k+1}-1}{2-1}(1+p)=(2^{k+1}-1)(1+p)$$

(2)　$2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ より, その正の約数の和 $s(2016)$ は,

$$s(2016)=(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2)(1+7)=63\cdot 13\cdot 8=6552$$

(3)　2016 の正の約数 n は, (2)から $a,\ b,\ c$ を整数として,

$$n=2^a\cdot 3^b\cdot 7^c\quad (0\leqq a\leqq 5,\ 0\leqq b\leqq 2,\ 0\leqq c\leqq 1)$$

すると, n の正の約数の和 $s(n)$ は,

$$s(n)=\frac{2^{a+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{b+1}-1}{3-1}\cdot\frac{7^{c+1}-1}{7-1}=\frac{1}{12}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)$$

条件より，$s(n)=2016$ なので，$\dfrac{1}{12}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^5\cdot 3^2\cdot 7$

$$(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot 3^3\cdot 7\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$2^{a+1}-1$ は奇数で $3^{b+1}-1$ と $7^{c+1}-1$ は偶数, そして $3^{b+1}-1$ と $7^{c+1}-1$ は 7 の倍数とはなりえないので，$2^{a+1}-1$ が 7 の倍数となる。

すると，$2^{a+1}-1$ の値として, 7，$3\cdot 7$，$3^2\cdot 7$，$3^3\cdot 7$ があげられる。

(i)　$2^{a+1}-1=7$ のとき　$a=2$ となり, $(*)$は $(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot 3^3$

$c=0$ のとき，$3^{b+1}-1=2^6\cdot 3^2$ となり，$3^{b+1}=577$ より整数 b は存在しない。

$c=1$ のとき，$3^{b+1}-1=2^3\cdot 3^2$ となり，$3^{b+1}=73$ より整数 b は存在しない。

(ii)　$2^{a+1}-1=3\cdot 7$ のとき　$2^{a+1}=22$ より整数 a は存在しない。

(iii)　$2^{a+1}-1=3^2\cdot 7$ のとき　$a=5$ となり, $(*)$は $(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot 3$

$c=0$ のとき，$3^{b+1}-1=2^6$ となり，$3^{b+1}=65$ より整数 b は存在しない。

$c=1$ のとき，$3^{b+1}-1=2^3$ となり，$b=1$ である。

(iv)　$2^{a+1}-1=3^3\cdot 7$ のとき　$2^{a+1}=190$ より整数 a は存在しない。

(i)～(iv)より，$(a,\ b,\ c)=(5,\ 1,\ 1)$ となり，$n=2^5\cdot 3^1\cdot 7^1=672$ である。

［解 説］

正の約数すべての和という頻出事項が題材になっています。(3)については, まず偶奇でふるいにかけたところ絞り込みが足らず, まだ候補が多いので, 次に 7 の倍数に注目しています。