1

解答解説のページへ

曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-2$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-2<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

2

解答解説のページへ

2 つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2) (1)でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3) 点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

ただし(2), (3)においては，3 点 O, P, Q が同一直線上にあるときは，△OPQ の面積は 0 であるとする。

3

解答解説のページへ

玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1)　次の条件(＊)を満たす整数 a, b, c, d, e, f の組をすべて求めよ。

$$(*)\ \begin{cases} 2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の 2 つの解が } c,\ d \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の 2 つの解が } e,\ f \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の 2 つの解が } a,\ b \text{ である。} \end{cases}$$

(2)　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件(＊＊)を満たすとする。

(＊＊) すべての正の整数 n について，a_n，b_n は整数であり，2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} である。

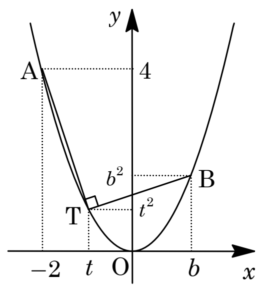
このとき，

(i)　正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ。

(ii)　条件(＊＊)を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の組をすべて求めよ。

1

問題のページへ



$\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{T}(t,\ t^2)\ (-2<t<b)$に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(t+2,\ t^2-4)=(t+2)(1,\ t-2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，ある t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BT}}=0,\ 1+(t-2)(t+b)=0$$

$$t^2+(b-2)t-2b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$(*)$を満たす t が $-2<t<b$ に少なくとも 1 つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1=\left(t+\dfrac{b-2}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+4b}{4}$ とおくと，

$$f(-2)=-4b+9,\ f(b)=2b^2-4b+1=2(b-1)^2-1$$

これより，$b>\dfrac{9}{4}$ のとき $f(-2)<0$，$-2<b\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき $f(-2)\geqq 0$ となり，また $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき $f(b)<0$，$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b$ のとき $f(b)\geqq 0$

(i)　$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(-2)>0$ かつ $f(b)\geqq 0$ より，求める条件は，

$$-2<-\frac{b-2}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\ -\frac{b^2+4b}{4}\leqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-2<4$ となり，$\dfrac{2}{3}<b<6$

②より，$b(b+4)\geqq 0$ となり，$b\leqq -4,\ 0\leqq b$

$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ と合わせると，適する b は存在しない。

(ii)　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(-2)>0$ かつ $f(b)<0$ より適する。

(iii)　$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき　$f(-2)\geqq 0$ かつ $f(b)\geqq 0$ から，(i)と同様である。

求める条件は，①②より $\dfrac{2}{3}<b<6$ かつ$(b\leqq -4,\ 0\leqq b)$となり，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ と合わせると，適する b は $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ である。

(iv)　$b>\dfrac{9}{4}$ のとき　$f(-2)<0$ かつ $f(b)>0$ より適する。

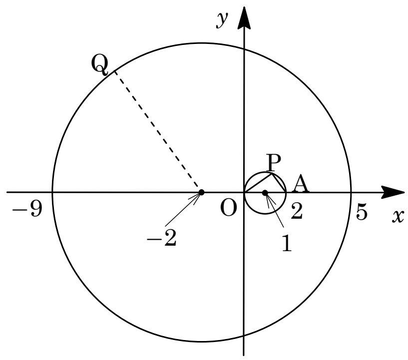
(i)～(iv)より，求める条件は，$b>\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ となる。

［解　説］

図形的な条件を数式化した後は，2 次方程式の解の配置の問題になります。文系の類題と同じく，$f(-2)$，$f(b)$の符号をもとに場合分けをしています。

2

問題のページへ



(1)　A$(2,\ 0)$とおくと，線分 OA が円 C の直径となるので，$\angle\mathrm{APO}=\dfrac{\pi}{2}$となる。

条件から，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$として$\angle\mathrm{AOP}=\theta$より，

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OA}\cos\theta=2\cos\theta$$

また，P$(x,\ y)$とおくと，

$$x=\mathrm{OP}\cos\theta,\ y=\mathrm{OP}\sin\theta$$

よって，P$(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)$である。

(2)　中心$(-2,\ 0)$で半径 7 の円 D 上の点 Q を，Q$(-2+7\cos\varphi,\ 7\sin\varphi)$ $(0\leqq\varphi<2\pi)$とおくと，△OPQ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left|2\cos^2\theta\cdot 7\sin\varphi-2\sin\theta\cos\theta(-2+7\cos\varphi)\right|$$
$$=\left|7\cos^2\theta\sin\varphi-7\sin\theta\cos\theta\cos\varphi+2\sin\theta\cos\theta\right|$$
$$=\cos\theta\left|7(\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi)+2\sin\theta\right|=\cos\theta\left|7\sin(\varphi-\theta)+2\sin\theta\right|$$

ここで，θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で固定すると，$\sin\theta>0$ で $-\theta\leqq\varphi-\theta<2\pi-\theta$ より，$\varphi-\theta=\dfrac{\pi}{2}\left(\varphi=\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき S は最大になる。

このとき，$\cos\varphi=-\sin\theta$，$\sin\varphi=\cos\theta$ より，Q$(-2-7\sin\theta,\ 7\cos\theta)$である。

(3)　(2)より，S の最大値は，$S=\cos\theta\left|7+2\sin\theta\right|=\cos\theta(7+2\sin\theta)$

そこで，この φ と θ の関係を保ったまま，x 軸に関する対称性から点 P の y 座標が正，すなわち θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で動かすと，

$$S'=-\sin\theta(7+2\sin\theta)+\cos\theta\cdot 2\cos\theta=-7\sin\theta-2\sin^2\theta+2(1-\sin^2\theta)$$
$$=-4\sin^2\theta-7\sin\theta+2$$
$$=-(4\sin\theta-1)(\sin\theta+2)$$

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

そこで，$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，$S$ は増減が右表のようになり，$\theta=\alpha$ で最大となる。

そして，点 P が O, A に一致する場合も考え合わせて，S の最大値は，

$$\cos\alpha(7+2\sin\alpha)=\sqrt{1-\frac{1}{16}}\left(7+2\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{15}$$

［解　説］

2 変数関数の最大・最小問題ですが，まず 1 文字を固定して考えるという丁寧な誘導がついています。なお，(2)は図形的な処理も可能です。

3

問題のページへ

(1)　袋 A に赤玉 2 個，袋 B に白玉 2 個の状態から始めて，与えられた操作を 1 回行った後，袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について，その確率 $P_1(k)$ は，

(i)　$k=0$ のとき　B→A に白，次に A→B に白の場合より，$P_1(0)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(ii)　$k=1$ のとき　B→A に白，次に A→B に赤の場合より，$P_1(1)=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(iii)　$k=2$ のとき　この場合は起こりえないので，$P_1(2)=0$

(2)　袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について，

(i)　与えられた操作を n 回行った後，$k=0$ のときに操作をもう 1 回行うとき
(1)から，$k=0$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(ii)　与えられた操作を n 回行った後，$k=1$ のときに操作をもう 1 回行うとき
$k=0$ となるのは，B→A に赤，次に A→B に白の場合より，その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$k=1$ となるのは，B→A に赤，次に A→B に赤の場合，もしくは B→A に白，次に A→B に白の場合より，その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$k=2$ となるのは，B→A に白，次に A→B に赤の場合より，その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(iii)　与えられた操作を n 回行った後，$k=2$ のときに操作をもう 1 回行うとき
(i)と同様に考えて，$k=2$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(i)～(iii)より，$P_n(k)$ と $P_{n+1}(k)$ の関係は，$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)=1$ に留意すると，

$$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)\cdots\cdots\cdots①$$

$$P_{n+1}(1)=\frac{2}{3}P_n(0)+\frac{2}{3}P_n(1)+\frac{2}{3}P_n(2)=\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$P_n(1)=\frac{2}{3}$ $(n\geqq 2)$ となり，(1)から $P_1(1)=\frac{2}{3}$ なので，$P_n(1)=\frac{2}{3}$ $(n\geqq 1)$

①に代入すると，$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{9}$ となり，$P_{n+1}(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{P_n(0)-\frac{1}{6}\right\}$

$$P_n(0)-\frac{1}{6}=\left\{P_1(0)-\frac{1}{6}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって，$P_n(0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ となり，

$$P_n(2)=1-P_n(0)-P_n(1)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解　説］

確率と漸化式について，よく見かける頻出問題です。

4　問題のページへ

(1)　整数 a, b, c, d, e, f に対し，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が c，d より，

$c+d=-a$ ………①，$cd=b$ ………②

また，2 次方程式 $x^2+cx+d=0$ の 2 つの解が e，f より，

$e+f=-c$ ………③，$ef=d$ ………④

さらに，2 次方程式 $x^2+ex+f=0$ の 2 つの解が a，b より，

$a+b=-e$ ………⑤，$ab=f$ ………⑥

②④⑥より，$abcdef=bdf$，$bdf(ace-1)=0$ ………⑦

(i)　$bdf=0$ のとき

$b=0$ とすると，⑥より $f=0$ となり，④より $d=0$

$d=0$ とすると，②より $b=0$ となり，⑥より $f=0$

$f=0$ とすると，④より $d=0$ となり，②より $b=0$

よって，いずれの場合も $b=d=f=0$ である。

すると，①より $c=-a$，③より $e=-c$，⑤より $a=-e$ から，$a=-e=c=-a$

$a=c=e=0$

(ii)　$bdf\neq 0$ のとき　⑦より $ace=1$ となり，a, c, e は整数より，

(ii-i)　$(a,\ c,\ e)=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

①より $1+d=-1$，③より $1+f=-1$，⑤より $1+b=-1$ から，$b=d=f=-2$

なお，この値は②④⑥を満たす。

(ii-ii)　$(a,\ c,\ e)=(1,\ -1,\ -1)$ のとき　①より $-1+d=-1$ から $d=0$ で不適

(ii-iii)　$(a,\ c,\ e)=(-1,\ 1,\ -1)$ のとき　③より $-1+f=-1$ から $f=0$ で不適

(ii-iv)　$(a,\ c,\ e)=(-1,\ -1,\ 1)$ のとき　⑤より $-1+b=-1$ から $b=0$ で不適

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ -2,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2)$

(2)　整数 a_n，b_n，a_{n+1}，b_{n+1} に対し，$x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} より，

$a_n=-a_{n+1}-b_{n+1}$ ………①，$b_n=a_{n+1}b_{n+1}$ ………②

(i)　正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示す。

(a)　すべての n に対して $b_n\neq 0$ のとき

②より，$a_{n+1}\neq 0$ から $|a_{n+1}|\geqq 1$ となり，$|b_n|=|a_{n+1}||b_{n+1}|\geqq|b_{n+1}|$ から，

$|b_1|\geqq|b_2|\geqq\cdots\geqq|b_n|\geqq|b_{n+1}|\geqq\cdots$　………③

不等式③で等号が成立しない場合は，ある正の整数 l に対し $|b_l|<0$ となり不適。

これより，ある正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在する。

(b)　ある正の整数 k に対して $b_k=0$ のとき

①②において，$n=k$ とおくと，

$a_k=-a_{k+1}-b_{k+1}$ ………④，$0=a_{k+1}b_{k+1}$ ………⑤

ここで，$b_{k+1}\neq 0$ と仮定すると，⑤より $a_{k+1}=0$，④に代入して $b_{k+1}=-a_k$

すると，$x^2+a_{k+1}x+b_{k+1}=0$ すなわち $x^2-a_k=0$ の解が整数 a_{k+2}，b_{k+2} であることより a_k は平方数となり，$a_k\neq 0$ から α を正の整数として $a_k=\alpha^2$ とおくと，

$$(a_{k+2},\ b_{k+2})=(\pm\alpha,\ \mp\alpha)\ （以下，複号同順）$$

さらに，$x^2+a_{k+2}x+b_{k+2}=0$ すなわち $x^2\pm\alpha x\mp\alpha=0$ の解が整数 a_{k+3}，b_{k+3} であることより，

$$\pm\alpha=-a_{k+3}-b_{k+3}\cdots\cdots\cdots⑥,\ \mp\alpha=a_{k+3}b_{k+3}\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦から，$a_{k+3}b_{k+3}-a_{k+3}-b_{k+3}=0$ となり，$(a_{k+3}-1)(b_{k+3}-1)=1$

(b-1)　$(a_{k+3}-1,\ b_{k+3}-1)=(1,\ 1)$ のとき

$(a_{k+3},\ b_{k+3})=(2,\ 2)$ となり，$x^2+2x+2=0$ の解は整数 a_{k+4}，b_{k+4} であるが，$D/4=-1<0$ から虚数解となり不適である。

(b-2)　$(a_{k+3}-1,\ b_{k+3}-1)=(-1,\ -1)$ のとき

$(a_{k+3},\ b_{k+3})=(0,\ 0)$ となり，$\alpha>0$ から⑥⑦は成立しない。

したがって，ある k で $b_k=0$ のとき $b_{k+1}=0$ となる。そして同様に，$b_{k+2}=0$，$b_{k+3}=0$，…となり，k を m に置き換えると，

$$0=b_m=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$$

以上より，(a)(b)のいずれの場合も，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となる。

(ii)　(i)の場合分けに従って，①②を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の組を求める。

(a)　すべての n に対して $b_n\neq 0$ のとき

β を正の整数として，(i)から，$\beta=|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots\ \cdots\cdots\cdots⑧$

さて，②で $n=m$ とすると，$b_m=a_{m+1}b_{m+1}$ となり，$|b_m|=|a_{m+1}||b_{m+1}|$ より，

$$\beta=|a_{m+1}|\beta,\ |a_{m+1}|=1$$

同様にして，$b_{m+1}=a_{m+2}b_{m+2}$ から $|a_{m+2}|=1$ なので，同様に繰り返すと，

$$1=|a_{m+1}|=|a_{m+2}|=|a_{m+3}|=\cdots\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

さて，⑧より $b_{m+1}=\pm\beta$ であるが，まず $b_{m+1}=\beta$ のときについて調べる。

すると，$x^2+a_{m+1}x+b_{m+1}=0$ すなわち $x^2+a_{m+1}x+\beta=0$ の解は整数 a_{m+2}，b_{m+2} であるが，⑨に注意すると，$D={a_{m+1}}^2-4\beta=|a_{m+1}|^2-4\beta=1-4\beta<0$ より虚数解となり不適である。

よって，$b_{m+1}\neq\beta$ から $b_{m+1}=-\beta$ となる。同様に，$b_{m+2}=-\beta$ となり繰り返すと，

$$-\beta=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots\ \cdots\cdots\cdots⑩$$

②から $b_{m+1}=a_{m+2}b_{m+2}$ に⑩を代入すると，$a_{m+2}=1$ となる。同様にすると，$a_{m+3}=1$ となり，繰り返すと，

$$1=a_{m+2}=a_{m+3}=a_{m+4}=\cdots\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで，①から $a_{m+2}=-a_{m+3}-b_{m+3}$ に代入すると，$1=-1+\beta$，$\beta=2$ となり，

$-2=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑫

さらに，①より，$a_{m+1}=-a_{m+2}-b_{m+2}=-1-(-2)=1$

$a_m=-a_{m+1}-b_{m+1}=-1-(-2)=1$

また，②より，$b_m=a_{m+1}b_{m+1}=1\times(-2)=-2$ となり，同様に繰り返すと，

$a_1=a_2=\cdots=a_m=a_{m+1}=1$，$b_1=b_2=\cdots=b_m=-2$………⑬

以上より，⑪⑫⑬をまとめると，$n\geqq1$ で，$a_n=1$，$b_n=-2$

(b)　ある正の整数 m に対して $b_m=0$ のとき

(i)より，$0=b_m=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑭

ここで，②より，$b_{m-1}=a_mb_m=0$，$b_{m-2}=a_{m-1}b_{m-1}=0$ となり，繰り返すと，

$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_{m-2}=b_{m-1}=0$………⑮

⑭⑮をまとめると，$n\geqq1$ で，$b_n=0$

すると，①より，$a_1=-a_2-b_2=-a_2$，$a_2=-a_3-b_3=-a_3$ となり，

$a_n=-a_{n+1}-b_{n+1}=-a_{n+1}$

これより，$a_2=-a_1$，$a_3=-a_2$，…，$a_{n+1}=-a_n$ となり，$n\geqq1$ で，

$a_n=a_1(-1)^{n-1}$

(a)(b)より，$(a_n,\ b_n)=(1,\ -2)$ または $(a_n,\ b_n)=\left(a_1(-1)^{n-1},\ 0\right)$（$a_1$ は整数）

［解　説］

(1)は整数が絡んだ連立方程式の問題ですが，(2)は整数と漸化式についての時間無制限の難問です。2 次方程式から生成される整数解の数列という，非常にきつい条件が与えられているので，初めのうちはなんとかうまくいっても，そのうち破綻し，そこが付け目という気持ちで考えています。とはいえ，解答例の書き直しは何回もしなくてはいけませんでした。