1　　解答解説のページへ

a を正の定数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問いに答えよ。

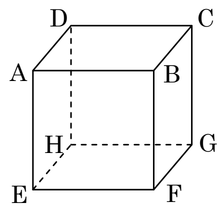
(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。

2

解答解説のページへ



右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　次の条件(＊)を満たす 3 つの自然数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ。

(＊)　$a<b<c$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　偶数 $2n$ $(n \geqq 1)$ の 3 つの正の約数 $p,\ q,\ r$ で，$p>q>r$ と $p+q+r=n$ を満たす組$(p,\ q,\ r)$の個数を $f(n)$ とする。ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$ とする。n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ。また，$f(n)=M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ。

1

問題のページへ

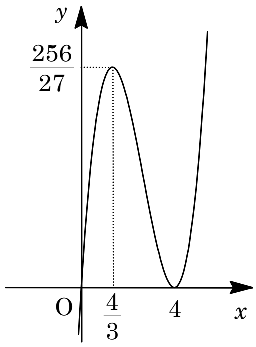
(1) $g(x)=x(x-4)^2$ に対して,

$$g'(x)=(x-4)^2+2x(x-4)$$
$$=(x-4)(3x-4)$$

すると，$g(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $\dfrac{256}{27}$ $\left(x=\dfrac{4}{3}\right)$，極小値は 0 $(x=4)$ である。

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

また, グラフの概形は右図のようになる。



(2) $f(x)=ax^2\ (a>0)$ に対し，$g(x)=f(x)$ とおくと,

$$x(x-4)^2=ax^2,\ x\{x^2-(a+8)x+16\}=0$$

これより，$x=0$，$x^2-(a+8)x+16=0$ ……①となる。

ここで, $x=0$ は①を満たさず, 判別式 D は,

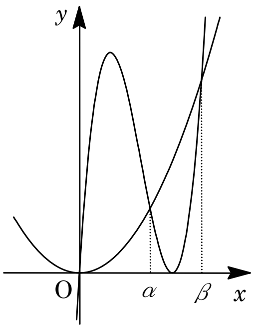
$$D=(a+8)^2-64=a(a+16)>0$$

したがって，$g(x)=f(x)$ は異なる 3 つの実数解をもつ。すなわち, 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わる。

(3) ①の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと,

$$\alpha+\beta=a+8\ \cdots\cdots\cdots②,\ \alpha\beta=16\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで, 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるので,



$$\int_0^\alpha \{g(x)-f(x)\}dx=\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$\int_0^\alpha \{g(x)-f(x)\}dx+\int_\alpha^\beta \{g(x)-f(x)\}dx=0$$

よって，$\displaystyle\int_0^\beta \{g(x)-f(x)\}dx=0$ ……④となり，④の左辺を I とおくと,

$$I=\int_0^\beta \{x^3-(a+8)x^2+16x\}dx=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{a+8}{3}x^3+8x^2\Big]_0^\beta$$
$$=\frac{\beta^4}{4}-\frac{a+8}{3}\beta^3+8\beta^2=\frac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-4(a+8)\beta+96\}$$

すると，$\beta>0$ なので, ④から，$3\beta^2-4(a+8)\beta+96=0$ ………⑤

そこで, ②⑤から $3\beta^2-4(\alpha+\beta)\beta+96=0$ となり，$-\beta^2-4\alpha\beta+96=0$

③を代入すると $-\beta^2-64+96=0$ となり，$\beta^2=32$ から $\beta=4\sqrt{2}$ である。

そして, ③から $\alpha=\dfrac{16}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ なので, ②から,

$$a=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-8=6\sqrt{2}-8$$

このとき，2 つの曲線の交点の x 座標は，$x=0$，α，β から，

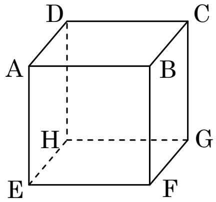
$$x=0,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}$$

［解 説］

定積分と面積に関する有名な設定が題材になっています。ポイントは④式を導くところで，それ以降は②③⑤の連立方程式を解いているにすぎません。

$\boxed{2}$

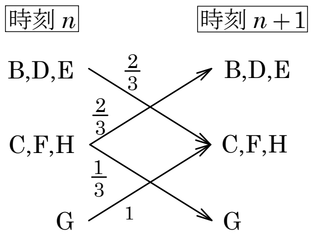
問題のページへ



(1)　時刻 0 で A にいた点 P が，時刻 n において，A に戻らず B, D, E のいずれかにいる確率 p_n，A に戻らず C, F, H のいずれかにいる確率 q_n，A に戻らず G にいる確率 r_n について，

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots③$$



ここで，$p_1=1$，$q_1=r_1=0$ なので，①②③より，

$$p_2=\frac{2}{3}q_1=0,\quad q_2=\frac{2}{3}p_1+r_1=\frac{2}{3},\quad r_2=\frac{1}{3}q_1=0$$

$$p_3=\frac{2}{3}q_2=\frac{4}{9},\quad q_3=\frac{2}{3}p_2+r_2=0,\quad r_3=\frac{1}{3}q_2=\frac{2}{9}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，①より $p_n=\frac{2}{3}q_{n-1}$，③より $r_n=\frac{1}{3}q_{n-1}$

②に代入すると，$q_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1}$，$q_{n+1}=\frac{7}{9}q_{n-1}\cdots\cdots\cdots④$

さて，④に $n=2k$ を代入すると $q_{2k+1}=\frac{7}{9}q_{2k-1}$ となり，$q_{2k-1}=q_1\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=0$

$$p_{2k}=\frac{2}{3}q_{2k-1}=0,\quad r_{2k}=\frac{1}{3}q_{2k-1}=0$$

④に $n=2k+1$ を代入すると $q_{2k+2}=\frac{7}{9}q_{2k}$ となり，$q_{2k}=q_2\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1}=\frac{2}{3}q_{2k}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1},\quad r_{2k+1}=\frac{1}{3}q_{2k}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より，$q_n=0$ (n が奇数)，$q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ (n が偶数)

また，$n=2k+1$ のとき，$k-1=\frac{n-3}{2}$ から，

$$p_n=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\quad p_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

$$r_n=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\quad r_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

(3)　時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m は，$m\geqq 2$ のとき，

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお，$m=1$ のときは，$s_1=\frac{1}{3}p_1=\frac{1}{3}$ である。

［解　説］

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが，特別な形でしたので，n を偶奇に分けて記しています。

3　　問題のページへ

(1)　条件(＊)から，自然数a，b，cに対し，$a<b<c$かつ$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$………①

すると，$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}>0$となるので，①から$\dfrac{3}{a}>\dfrac{1}{2}$，すなわち$a<6$………②

また，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>0$なので，①から$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{2}$，すなわち$a>2$………③

②③より$2<a<6$となり，$a=3,\ 4,\ 5$である。

(i)　$a=3$のとき　①より$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}$となり，

$bc-6b-6c=0$，$(b-6)(c-6)=36$

ここで，$3<b<c$から$-3<b-6<c-6$となり，

$(b-6,\ c-6)=(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9)$

よって，$(b,\ c)=(7,\ 42),\ (8,\ 24),\ (9,\ 18),\ (10,\ 15)$

(ii)　$a=4$のとき　①より$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}$となり，

$bc-4b-4c=0$，$(b-4)(c-4)=16$

ここで，$4<b<c$から$0<b-4<c-4$となり，

$(b-4,\ c-4)=(1,\ 16),\ (2,\ 8)$

よって，$(b,\ c)=(5,\ 20),\ (6,\ 12)$

(iii)　$a=5$のとき　①より$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{10}$となり，

$3bc-10b-10c=0$，$9bc-30b-30c=0$，$(3b-10)(3c-10)=100$

$5<b<c$から$5<3b-10<3c-10$となり，適する$(3b-10,\ 3c-10)$はない。

(i)〜(iii)より，自然数の組$(a,\ b,\ c)$は，

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 42),\ (3,\ 8,\ 24),\ (3,\ 9,\ 18),\ (3,\ 10,\ 15),$
$(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12)$

(2)　$2n$の正の約数 p，q，r に対し，$p>q>r$かつ$p+q+r=n$ ……④を満たす$(p,\ q,\ r)$の個数を$f(n)$とすると，④から，

$\dfrac{p}{2n}+\dfrac{q}{2n}+\dfrac{r}{2n}=\dfrac{1}{2}$………⑤

ここで，$\dfrac{2n}{p}=a$，$\dfrac{2n}{q}=b$，$\dfrac{2n}{r}=c$とおくと，a，b，cは自然数となり，さらに，$p>q>r$から，$\dfrac{2n}{p}<\dfrac{2n}{q}<\dfrac{2n}{r}$すなわち$a<b<c$である。

さらに，⑤をa，b，cで表すと，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$である。

すなわち，自然数の組$(p,\ q,\ r)$は，条件(＊)を満たす自然数の組$(a,\ b,\ c)$に対応し，その個数$f(n)$の最大値Mは，(1)の結果から$M\leqq 6$である。

以下，この 6 つの場合について，n の条件を求める。

(i)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 42)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=7$，$\dfrac{2n}{r}=42$ より，

$$3p=2n\ ,\ 7q=2n\ ,\ 21r=n$$

よって，このとき n は 21 の倍数である。

(ii)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 8,\ 24)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=8$，$\dfrac{2n}{r}=24$ より，

$$3p=2n\ ,\ 4q=n\ ,\ 12r=n$$

よって，このとき n は 12 の倍数である。

(iii)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 9,\ 18)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=9$，$\dfrac{2n}{r}=18$ より，

$$3p=2n\ ,\ 9q=2n\ ,\ 9r=n$$

よって，このとき n は 9 の倍数である。

(iv)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 10,\ 15)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=10$，$\dfrac{2n}{r}=15$ より，

$$3p=2n\ ,\ 5q=n\ ,\ 15r=2n$$

よって，このとき n は 15 の倍数である。

(v)　$(a,\ b,\ c)=(4,\ 5,\ 20)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=4$，$\dfrac{2n}{q}=5$，$\dfrac{2n}{r}=20$ より，

$$2p=n\ ,\ 5q=2n\ ,\ 10r=n$$

よって，このとき n は 10 の倍数である。

(vi)　$(a,\ b,\ c)=(4,\ 6,\ 12)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=4$，$\dfrac{2n}{q}=6$，$\dfrac{2n}{r}=12$ より，

$$2p=n\ ,\ 3q=n\ ,\ 6r=n$$

よって，このとき n は 6 の倍数である。

(i)～(vi)より，自然数 n が上記の条件をすべて満たすとき $M=6$ となる。

ここで，$21=3\times7$，$12=2^2\times3$，$9=3^2$，$15=3\times5$，$10=2\times5$，$6=2\times3$ から，n が $2^2\times3^2\times5\times7=1260$ の倍数のとき，条件をすべて満たす。

以上より，$M=6$ で，$f(n)=6$ となる最小の n は $n=1260$ である。

［解 説］

質，量ともにかなりハードな整数問題です。ただ，(1)が(2)への秀逸な誘導となっており，入試までに演習したい 1 題です。なお，(1)は，場合分けしたあと分母を払って因数分解をしていますが，不等式を用いて評価しても構いません。