1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，少なくとも一方は 0 でないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　連立不等式 $3x+2y+4 \geqq 0$，$x-2y+4 \geqq 0$，$ax+by \geqq 0$ の表す領域，または連立不等式 $3x+2y+4 \geqq 0$，$x-2y+4 \geqq 0$，$ax+by \leqq 0$ の表す領域が三角形であるために $a,\ b$ が満たすべき条件を求めよ。さらに，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の三角形の面積を S とするとき，S を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　$S \geqq 4$ を示せ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数であることを示せ。

(2) n を奇数とする。このとき$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$を満たす整数$\alpha$，$\beta$は存在しないことを示せ。

(3) c を実数とする。このとき 3 次方程式$x^3-2018x+c=0$の解のうち整数であるものは 1 個以下であることを示せ。

3

解答解説のページへ

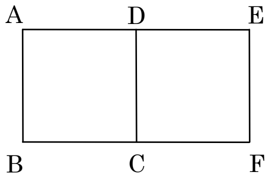


図 1

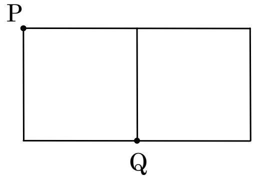


図 2

図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則(a), (b)に従って移動する。

(a)　時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に, 点 Q は頂点 C にいる。

(b)　点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に, 今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n までに 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく, かつ時刻 n に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し, $b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を, 図 2 にならってすべて図示せよ。

(2)　a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。

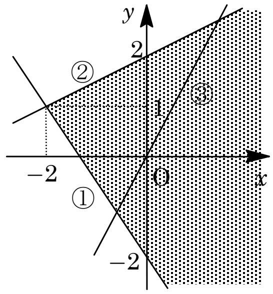
(3)　a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。

(4)　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。

1

問題のページへ

(1) 連立不等式 $3x+2y+4 \geqq 0$，$x-2y+4 \geqq 0$ の表す領域を D とする。ここで，境界線 $3x+2y+4=0$ ……①と $x-2y+4=0$ ……②の交点は，$(x,\ y)=(-2,\ 1)$ であることより，領域 D は右図の網点部となる。



さて，この領域 D と，$ax+by \geqq 0$ または $ax+by \leqq 0$ の表す領域の共通部分が三角形である条件は，境界線①と境界線 $ax+by=0$ ……③，および境界線②と境界線③が，ともに $x>-2$ に交点をもつことである。

ここで①③を連立すると，$2a-3b \neq 0$ のもとで $(x,\ y)=\left(\dfrac{4b}{2a-3b},\ \dfrac{-4a}{2a-3b}\right)$ となり，また②③を連立すると，$2a+b \neq 0$ のもとで $(x,\ y)=\left(\dfrac{-4b}{2a+b},\ \dfrac{4a}{2a+b}\right)$ から，

$$\frac{4b}{2a-3b}>-2 \cdots\cdots\cdots ④,\quad \frac{-4b}{2a+b}>-2 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④より，$4b(2a-3b)>-2(2a-3b)^2$ となり，$(2a-3b)(2a-b)>0$ ………⑥

⑤より，$-4b(2a+b)>-2(2a+b)^2$ となり，$(2a+b)(2a-b)>0$ ………⑦

よって，a, b が満たすべき条件は⑥かつ⑦であり，$2a-b$ の符号で場合分けして，

(i) $2a-b>0$ $(b<2a)$ のとき

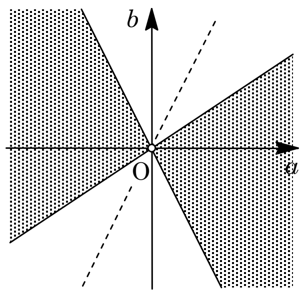
⑥より $2a-3b>0$，⑦より $2a+b>0$ となり，

$$-2a<b<\frac{2}{3}a$$

(ii) $2a-b<0$ $(b>2a)$ のとき

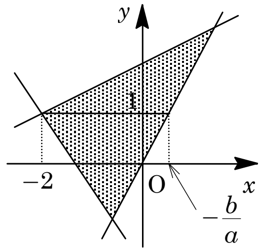
⑥より $2a-3b<0$，⑦より $2a+b<0$ となり，

$$\frac{2}{3}a<b<-2a$$



以上より，点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。

(2) 境界線③と直線 $y=1$ の交点は，(1)から $a \neq 0$ なので $(x,\ y)=\left(-\dfrac{b}{a},\ 1\right)$，また④⑤から $\dfrac{-4a}{2a-3b}<1<\dfrac{4a}{2a+b}$ なので，右図の三角形の面積 S は，



$$S=\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}+2\right)\left(\frac{4a}{2a+b}+\frac{4a}{2a-3b}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a-b}{a}\cdot 4a\cdot\frac{4a-2b}{(2a+b)(2a-3b)}$$
$$=\frac{2(2a-b)(4a-2b)}{(2a+b)(2a-3b)}=\frac{4(2a-b)^2}{(2a+b)(2a-3b)}$$

(3)　(2)より，$\dfrac{S-4}{4}=\dfrac{(2a-b)^2}{(2a+b)(2a-3b)}-1=\dfrac{4b^2}{(2a+b)(2a-3b)}\geqq 0$

よって，$S-4\geqq 0$ より，$S\geqq 4$ である。

［解 説］

領域を題材とした問題です。内容は基本レベルですが，丁寧に解いていくには時間が必要です。なお，式変形の過程など，省略気味に記しています。

2

問題のページへ

(1)　整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，次の 3 つの場合に分けて調べる。

(i)　α，βがともに奇数のとき

α^2，$\alpha\beta$，β^2はすべて奇数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(ii)　αが偶数，βが奇数のとき

α^2，$\alpha\beta$は偶数，β^2は奇数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(iii)　αが奇数，βが偶数のとき

α^2は奇数，$\alpha\beta$，β^2は偶数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(i)～(iii)より，いずれの場合も$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(2)　条件より，奇数nに対して，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$………①

まず，(1)より，整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数となるので，①は成立しない。

これより，①を満たす整数α，βは，ともに偶数である。

しかし，α，βがともに偶数のとき，α^2，$\alpha\beta$，β^2はすべて 4 の倍数となり，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は 4 の倍数である。よって，①は成立しない。

以上より，①を満たす整数α，βは存在しない。

(3)　3 次方程式$x^3-2018x+c=0$（cは実数）の解を，$x=\alpha$，β，γとおくと，

$$\alpha+\beta+\gamma=0\ \cdots\cdots\cdots②,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2018\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より$\gamma=-(\alpha+\beta)$となり，③に代入すると，

$$\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2=-2018,\quad \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2018\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$2018=2\times1009$なので，(2)から④を満たす整数α，βは存在しない。

すなわち，α，β，γのうち整数となるのは 1 個以下である。

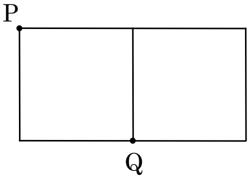
［解 説］

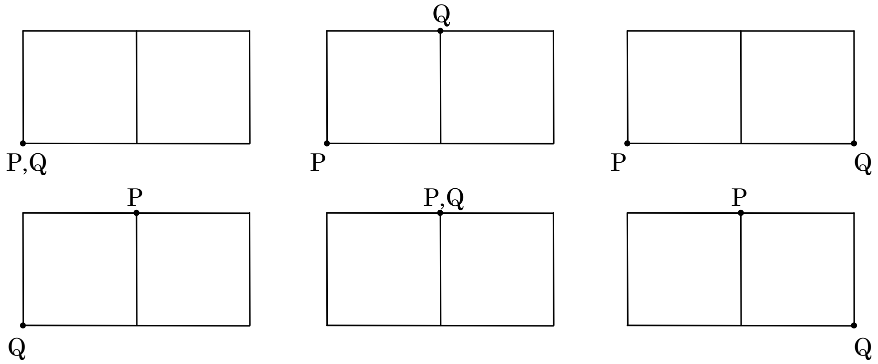
細かく誘導のついた整数問題です。方針に迷うことはないでしょう。

3

問題のページへ

(1) 条件より，時刻 0 での点 P，Q の配置が右図のとき，点 P，Q は独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動するので，時刻 1 での点 P，Q の可能な配置は，次の 6 パターンである。





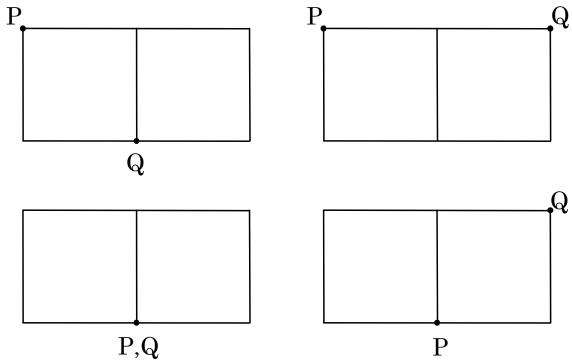
(2) まず，時刻 1 までに 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることがなく，かつ時刻 1 に 2 点 P，Q がともに同じ正方形上にいるのは，時刻 1 での左下，中上，右下の図の場合より，その確率 a_1 は $a_1=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ である。

また，時刻 1 までに 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることがなく，かつ時刻 1 に 2 点 P，Q が異なる正方形上にいるのは，時刻 1 での右上の図の場合より，その確率 b_1 は $b_1=\frac{1}{6}$ である。

ここで，対称性を考慮すると，一般的に 2 点 P，Q が同じ正方形の異なる頂点にいるのは，その正方形の対角線上に位置する場合であり，これを状態 X とする。また，2 点 P，Q が異なる正方形の頂点にいるのは，辺 CD について対称の位置にある場合であり，これを状態 Y とする。

すると，時刻 0 から時刻 1 への状態から，一般的に $X\to X$ の推移確率は $\frac{1}{2}$，$X\to Y$ の推移確率は $\frac{1}{6}$ となる。

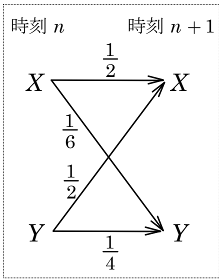
また，時刻 1 での右上図の点 P，Q の配置から，時刻 2 での点 P，Q の可能な配置は，右の 4 パターンである。すると，一般的に $Y\to X$ の推移確率は $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$Y\to Y$ の推移確率は $\frac{1}{4}$ となる。



まとめると，状態の推移は右図となり，$n=1$のときは，

$$a_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$b_2=\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{4}b_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$$



(3)　(2)と同様にして，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{4}b_n\cdots\cdots\cdots②$$

(4)　$p_n\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^n$ であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$のとき　$p_1=a_1+b_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\leqq\frac{3}{4}$ となり，成り立っている。

(ii)　$n=k$のとき　$p_k\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^k$ と仮定すると，①②から，

$$p_{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}=\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}b_k\right)+\left(\frac{1}{6}a_k+\frac{1}{4}b_k\right)=\frac{2}{3}a_k+\frac{3}{4}b_k$$

$$\leqq\frac{3}{4}a_k+\frac{3}{4}b_k=\frac{3}{4}(a_k+b_k)=\frac{3}{4}p_k\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

よって，$n=k+1$のときも成り立っている。

(i)(ii)より，$p_n\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^n$ である。

［解　説］

確率と漸化式の問題です。問題文の読解力が要求されるとともに，答案の記述についてもかなりのエネルギーが費やされます。