1

解答解説のページへ

a を実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax-a$ と $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ を考える。関数 $y=F(x)-f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

非負の整数 n に対して P_n を xy 平面上の点とする。P_0 の座標を $(1,\ 0)$ とし，P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ と P_{n+1} の座標 $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ は

$$x_{n+1} = x_n - k(y_n + y_{n+1}),\ \ y_{n+1} = y_n + k(x_n + x_{n+1})$$

を満たすとする。ただし k を正の実数とする。

(1)　$k = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ とする。ただし $0 < \alpha < \pi$ とする。このとき P_1，P_2 の座標 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を α を用いて表せ。

(2)　P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ を(1)の α と n を用いて表せ。

(3)　O を xy 平面の原点とするとき，三角形 P_nOP_{n+1} の面積を k を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

1つのサイコロを3回投げる。1回目に出る目を a, 2回目に出る目を b, 3回目に出る目を c とする。なお, サイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。

(1)　2次方程式 $x^2-bx+c=0$ が少なくとも1つ整数解をもつ確率を求めよ。

(2)　2次方程式 $ax^2-bx+c=0$ のすべての解が整数である確率を求めよ。

(3)　2次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が少なくとも1つ整数解をもつ確率を求めよ。

1

問題のページへ

aを実数とするとき，$f(x)=x^2+ax-a$に対して，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$より，

$$F(x)=\int_0^x (t^2+at-a)dt=\Big[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-at\Big]_0^x=\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2-ax$$

ここで，$g(x)=F(x)-f(x)$とおくと，

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2-ax-(x^2+ax-a)=\frac{x^3}{3}+\Big(\frac{a}{2}-1\Big)x^2-2ax+a$$

さて，$y=g(x)$のグラフがx軸と異なる3点で交わる条件を求めるために，

$$g'(x)=x^2+(a-2)x-2a=(x+a)(x-2)$$

(i)　$-a=2$ $(a=-2)$のとき

$g'(x)=(x-2)^2\geqq 0$より$g(x)$は単調に増加するので，$y=g(x)$のグラフが x 軸と異なる3点で交わる場合はない。

(ii)　$-a\neq 2$ $(a\neq -2)$のとき

$g'(x)=0$の解は$x=-a$，2となるので，$g(x)$は$-a<2$ $(a>-2)$のとき極大値$g(-a)$，極小値$g(2)$をもつ。また，$-a>2$ $(a<-2)$のとき極大値$g(2)$，極小値$g(-a)$をもつ。

すると，$y=g(x)$のグラフがx軸と異なる3点で交わる条件は，極大値と極小値が異符号，すなわち$g(-a)\cdot g(2)<0$……(＊)であり，

$$g(-a)=-\frac{a^3}{3}+\Big(\frac{a}{2}-1\Big)a^2+2a^2+a=\frac{a^3}{6}+a^2+a=\frac{1}{6}a(a^2+6a+6)$$
$$=\frac{1}{6}a\{a-(-3+\sqrt{3})\}\{a-(-3-\sqrt{3})\}$$
$$g(2)=\frac{8}{3}+4\Big(\frac{a}{2}-1\Big)-4a+a=-a-\frac{4}{3}=-\Big(a+\frac{4}{3}\Big)$$

(＊)から，$a\{a-(-3+\sqrt{3})\}\{a-(-3-\sqrt{3})\}\Big(a+\frac{4}{3}\Big)>0$となり，

$$a<-3-\sqrt{3},\ -\frac{4}{3}<a<-3+\sqrt{3},\ 0<a$$

そして，この不等式は$a\neq -2$を満たす。

(i)(ii)より，求めるaの条件は，$a<-3-\sqrt{3}$，$-\frac{4}{3}<a<-3+\sqrt{3}$，$0<a$である。

［解　説］

微分の応用に関する基本的な問題で，複雑な計算はありません。なお，最後の 4 次不等式の解は，グラフを対応させて求めています。

2

問題のページへ

(1)　$P_0(1,\ 0)$のとき，$n \geqq 0$に対し，$P_n(x_n,\ y_n)$と$P_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$の関係は,

$$x_{n+1}=x_n-k(y_n+y_{n+1})\cdots\cdots①,\quad y_{n+1}=y_n+k(x_n+x_{n+1})\cdots\cdots②$$

①から$x_{n+1}+ky_{n+1}=x_n-ky_n$，②から$-kx_{n+1}+y_{n+1}=kx_n+y_n$となり，

$$(1+k^2)x_{n+1}=(1-k^2)x_n-2ky_n,\quad x_{n+1}=\frac{1-k^2}{1+k^2}x_n-\frac{2k}{1+k^2}y_n\cdots\cdots\cdots③$$

$$(1+k^2)y_{n+1}=2kx_n+(1-k^2)y_n,\quad y_{n+1}=\frac{2k}{1+k^2}x_n+\frac{1-k^2}{1+k^2}y_n\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$0<\alpha<\pi$として$k=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)>0$とおくと,

$$\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\cos\alpha$$

$$\frac{2k}{1+k^2}=\frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\sin\alpha$$

すると，③④は,

$$x_{n+1}=(\cos\alpha)x_n-(\sin\alpha)y_n\cdots\cdots⑤,\quad y_{n+1}=(\sin\alpha)x_n+(\cos\alpha)y_n\cdots\cdots⑥$$

そこで，$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$なので，⑤⑥から，$x_1=\cos\alpha$，$y_1=\sin\alpha$

$$x_2=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha,\quad y_2=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=\sin 2\alpha$$

(2)　$n \geqq 0$のとき，$x_n=\cos n\alpha$，$y_n=\sin n\alpha$であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=0$のとき　$x_0=\cos 0=1$，$y_0=\sin 0=0$より成立している。

(ii)　$n=l$のとき　$x_l=\cos l\alpha$，$y_l=\sin l\alpha$であると仮定すると，⑤⑥から，

$$x_{l+1}=(\cos\alpha)x_l-(\sin\alpha)y_l=\cos\alpha\cos l\alpha-\sin\alpha\sin l\alpha=\cos(l+1)\alpha$$

$$y_{l+1}=(\sin\alpha)x_l+(\cos\alpha)y_l=\sin\alpha\cos l\alpha+\cos\alpha\sin l\alpha=\sin(l+1)\alpha$$

すると，$n=l+1$のときも成立している。

(i)(ii)より，$(x_n,\ y_n)=(\cos n\alpha,\ \sin n\alpha)$である。

(3)　$P_n(\cos n\alpha,\ \sin n\alpha)$，$P_{n+1}(\cos(n+1)\alpha,\ \sin(n+1)\alpha)$から,

$$\triangle P_nOP_{n+1}=\frac{1}{2}\left|\cos n\alpha\sin(n+1)\alpha-\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\sin((n+1)\alpha-n\alpha)\right|=\frac{1}{2}\left|\sin\alpha\right|=\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{k}{1+k^2}$$

［解 説］

与えられた漸化式を変形して，⑤⑥を導くことがポイントです。(1)はそのための誘導になっています。

3

問題のページへ

(1)　サイコロを3回投げ, 1回目に出る目を a, 2回目に出る目を b, 3回目に出る目を c としたとき, 2次方程式 $x^2-bx+c=0$ ……(＊)の解 $x=\alpha$, β に対して,

$$\alpha+\beta=b\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \alpha\beta=c\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで, (＊)の解の一方が整数とすると, ①から他方も整数となり，しかも $b>0$, $c>0$ から α, β はともに正の整数である。

そこで, $0<\alpha\leqq\beta$ とすると, ①②より,

$$2\alpha\leqq\alpha+\beta=b\leqq6,\quad \alpha^2\leqq\alpha\beta=c\leqq6$$

よって, $\alpha\leqq3$ かつ $\alpha\leqq\sqrt{6}$ から, $\alpha=1,\ 2$ となる。

(i)　$\alpha=1$ のとき

(a) $\beta=1$ のとき　$(b,\ c)=(2,\ 1)$　　(b) $\beta=2$ のとき　$(b,\ c)=(3,\ 2)$

(c) $\beta=3$ のとき　$(b,\ c)=(4,\ 3)$　　(d) $\beta=4$ のとき　$(b,\ c)=(5,\ 4)$

(e) $\beta=5$ のとき　$(b,\ c)=(6,\ 5)$

(f) $\beta\geqq6$ のとき　$b=\alpha+\beta\geqq7$ となり不適

(ii)　$\alpha=2$ のとき

(a) $\beta=2$ のとき　$(b,\ c)=(4,\ 4)$　　(b) $\beta=3$ のとき　$(b,\ c)=(5,\ 6)$

(c) $\beta\geqq4$ のとき　$c=\alpha\beta\geqq8$ となり不適

(i)(ii)より, (＊)が少なくとも1つ整数解をもつ確率は, $\dfrac{5+2}{6^2}=\dfrac{7}{36}$ である。

(2)　2次方程式 $ax^2-bx+c=0$ ……(＃)の解 $x=\alpha$, β に対して,

$$\alpha+\beta=\frac{b}{a}\ \cdots\cdots\cdots③,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(＃)の解がどちらも整数のとき, $\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{c}{a}>0$ から, α, β はともに正の整数である。そこで, (1)と同様に $0<\alpha\leqq\beta$ として, $\dfrac{b}{a}\leqq6$, $\dfrac{c}{a}\leqq6$ に③④を適用すると, $\alpha=1,\ 2$ となる。

(i)　$\alpha=1$ のとき

(a)　$\beta=1$ のとき　$(b,\ c)=a(2,\ 1)$ から,
　$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 4,\ 2)$, $(3,\ 6,\ 3)$

(b)　$\beta=2$ のとき　$(b,\ c)=a(3,\ 2)$ から,
　$(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 2)$, $(2,\ 6,\ 4)$

(c)　$\beta=3$ のとき　$(b,\ c)=a(4,\ 3)$ から, $(a,\ b,\ c)=(1,\ 4,\ 3)$

(d)　$\beta=4$ のとき　$(b,\ c)=a(5,\ 4)$ から, $(a,\ b,\ c)=(1,\ 5,\ 4)$

(e)　$\beta=5$ のとき　$(b,\ c)=a(6,\ 5)$ から, $(a,\ b,\ c)=(1,\ 6,\ 5)$

(f)　$\beta\geqq6$ のとき　$\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta\geqq7$ すなわち $b\geqq7a\geqq7$ となり不適

(ii)　$\alpha=2$のとき

(a)　$\beta=2$のとき　$(b,\ c)=a(4,\ 4)$から，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 4,\ 4)$

(b)　$\beta=3$のとき　$(b,\ c)=a(5,\ 6)$から，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 5,\ 6)$

(c)　$\beta\geqq 4$のとき　$\dfrac{c}{a}=\alpha\beta\geqq 8$すなわち$c\geqq 8a\geqq 8$となり不適

(i)(ii)より，(#)のすべての解が整数である確率は，

$$\frac{(3+2+1+1+1)+(1+1)}{6^3}=\frac{10}{6^3}=\frac{5}{108}$$

(3)　2 次方程式$ax^2-bx+c=0$……(#)の正の解$x=\alpha,\ \beta$に対して，αが整数，βが整数でないとする。すると，③より$a\geqq 2$が必要である。ただし，(2)から，

$$(a,\ b,\ c)\neq(2,\ 4,\ 2),\ (3,\ 6,\ 3),\ (2,\ 6,\ 4)$$

(i)　$\alpha=1$のとき　$a-b+c=0$から，$b=a+c\geqq 2+1=3$

(a)　$b=3$のとき　$(a,\ c)=(2,\ 1)$

(b)　$b=4$のとき　$(a,\ c)=(2,\ 2),\ (3,\ 1)$となるが，$(a,\ c)=(2,\ 2)$は不適

(c)　$b=5$のとき　$(a,\ c)=(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$

(d)　$b=6$のとき　$(a,\ c)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$となるが，

$(a,\ c)=(2,\ 4),\ (3,\ 3)$は不適

(ii)　$\alpha=2$のとき　$4a-2b+c=0$から$2b=4a+c\geqq 8+1=9$となり，$b\geqq 5$

(a)　$b=5$のとき　$(a,\ c)=(2,\ 2)$

(b)　$b=6$のとき　$(a,\ c)=(2,\ 4)$となるが，$(a,\ c)=(2,\ 4)$は不適

(iii)　$\alpha\geqq 3$のとき　$a\alpha^2-b\alpha+c=0$より，$6\alpha\geqq b\alpha=a\alpha^2+c\geqq 2\alpha^2+1$

すると，$6\alpha-2\alpha^2\geqq 1$から$2\alpha(3-\alpha)\geqq 1$となるが，$\alpha\geqq 3$から成立しない。

(i)～(iii)および(2)の結果より，(#)が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率は，

$$\frac{(1+1+3+2)+1+10}{6^3}=\frac{1}{12}$$

［解　説］

ていねいに場合分けをして数え上げるタイプの確率問題です。いろいろな解法が考えられますが，どのような方法であれ，最後は力技となるでしょう。なお，上の解答例では，(2)は(1)を誘導として，また(3)は(2)と少し視点を変えて記述しています。