1

解答解説のページへ

正の整数 n に対し，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n\theta}$ とする。

(1)　I_1 を求めよ。必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3)　xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。D を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を C とする。C を平面 $x = \dfrac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき，小さい方を S とする。z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

空間内に$\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B，C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれB'，C'とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}'} + \overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}} = 0$を示せ。

(2) $\angle \mathrm{B}'\mathrm{AC}' > \dfrac{\pi}{2}$を示せ。

(3) P 上の三角形$\mathrm{AB}'\mathrm{C}'$の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1)　このような n の中で最小のものを求めよ。

(2)　このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

4

解答解説のページへ

正の整数 n に対して 1, 2, $\cdots$, n を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ とする。この $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ に対し，各添字 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i=j\to a_j=k$ と書くことにする。ここで，$a_i=j\to a_j=k\to a_k=l\to\cdots$ のようにたどり，それを続けていく。

例えば，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)=(2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4,\ 3,\ 7)$ のとき，

(i)　$a_1=2\to a_2=5\to a_5=4\to a_4=1\to a_1=2$

(ii)　$a_3=6\to a_6=3\to a_3=6$

(iii)　$a_7=7\to a_7=7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の(i), (ii), (iii)は長さがそれぞれ 4, 2, 1 のサイクルになっている。

(1)　$n=3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2)　$n=4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3)　n 以下の正の整数 k に対して，$\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}>\log(n+1)-\log k$ を示せ。

(4)　n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は，$p>\log 2$ を満たすことを示せ。

1　　　　問題のページへ

(1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\Big)d\theta$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|1+\sin\theta|-\log|1-\sin\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\Big[\log\Big|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\Big|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\log(2+\sqrt{3})\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}d\theta$

$$=\Big[\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-(-n+2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\cdot\frac{-\sin\theta}{\cos^{n-1}\theta}d\theta$$

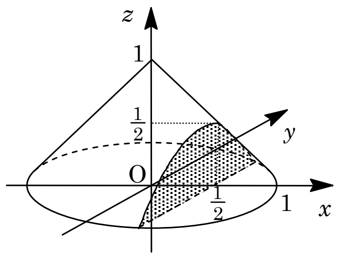
$$=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^n\theta}d\theta=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^n\theta}d\theta$$

$$=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\frac{1}{\cos^n\theta}-\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}\Big)d\theta=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)(I_n-I_{n-2})$$

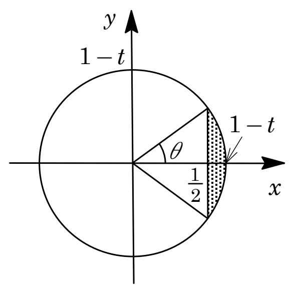
すると，$(1+n-2)I_n=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}+(n-2)I_{n-2}$ となり，

$$I_n=\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\frac{\sqrt{3}}{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdots\cdots\cdots②$$

(3) xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐 C の $x\geqq\frac{1}{2}$ の部分 S を，平面 $z=t$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\right)$ で切断したとき，その切り口は点 $(0,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 $1-t$ の円板の $x\geqq\frac{1}{2}$ の部分になる。



そして，右図の網点部で表される切り口について，θ を $(1-t)\cos\theta=\frac{1}{2}$ で設定し，切り口の面積を $T(t)$ とおくと，



$$T(t)=2\Big\{\frac{1}{2}(1-t)^2\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-t)\sin\theta\Big\}$$

$$=(1-t)^2\theta-\frac{1}{2}(1-t)\sin\theta=\frac{\theta}{4\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}$$

すると，求める S の体積 V は，

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}}T(t)dt$$

ここで，$t=1-\dfrac{1}{2\cos\theta}$ から $dt=-\dfrac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}d\theta$ となり，また $t=0\to\dfrac{1}{2}$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{3}\to 0$ であるので，

$$V=-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left(\frac{\theta}{4\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\right)d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)d\theta=I_3-I_1$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta=\left[\frac{\theta}{3\cos^3\theta}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta=\frac{8}{9}\pi-\frac{1}{3}I_3$$

すると，①②を利用して，

$$V=\frac{1}{8}\left(\frac{8}{9}\pi-\frac{1}{3}I_3-I_3+I_1\right)=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{6}I_3+\frac{1}{8}I_1=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}I_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2\right)+\frac{1}{8}I_1$$
$$=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{24}I_1=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{24}\log(2+\sqrt{3})$$

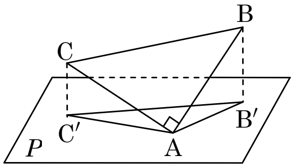
［解 説］

立体の体積計算についての有名問題です。(1)(2)の定積分を誘導として考えると，中心角を設定して，切り口の弓形の面積を求めるという流れが見えてきます。計算はやや面倒ですが。

2

問題のページへ

(1)　空間内に$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，P 上にない点 B, C から P に垂線を下ろし，P との交点をそれぞれB'，C'とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$に注意して，



$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC'}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$$
$$=2\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$$

すると，線分$\mathrm{BB'}$と$\mathrm{CC'}$はともに平面 P に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BB'}}=0$となり，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$ ……(＊)である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$と$\overrightarrow{\mathrm{C'C}}$は同じ向きに平行なので，$k>0$として$\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=k\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$とおくことができる。すると，(＊)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=-\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=-k\left|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\right|^2<0$$

これより，$\cos\angle\mathrm{B'AC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\right|}<0$となり，$\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$である。

(3)　3 辺の長さが 4，$\sqrt{21}$，7 である$\triangle\mathrm{AB'C'}$は，$\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$から最長辺$\mathrm{B'C'}=7$であり，また一般性を失うことなく$\mathrm{AB'}=4$，$\mathrm{AC'}=\sqrt{21}$とすることができるので，

$$7^2=4^2+21-2\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\frac{16+21-49}{2}=-6$$

すると，(＊)から，$\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=-(-6)=6$となり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{C'C}}\right|=6$

さて，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=l$とおくと，$\mathrm{B'B}=\sqrt{l^2-16}$，$\mathrm{C'C}=\sqrt{l^2-21}$となり，

$$\sqrt{l^2-16}\cdot\sqrt{l^2-21}=6,\quad (l^2-16)(l^2-21)=36$$

これより，$l^4-37l^2+300=0$となり，$(l^2-25)(l^2-12)=0$

ここで，$l^2>16$かつ$l^2>21$なので$l^2=25$となり，$\mathrm{AB}=l=5$である。

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。(1)が(2)へ，そして(1)と(2)が(3)へと，うまく繋がっています。

3　　　　問題のページへ

(1)　$\sqrt{n}$ の整数部分を a とおくと，$\sqrt{n}$ が整数でないことより，

$$a < \sqrt{n} < a+1,\ \ a^2 < n < a^2+2a+1$$

すなわち，$n = a^2 + k\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2a)$ ……①とおくことができる。

ここで，$\sqrt{n}$ の小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数なので，

$$a + \frac{1}{100} \leqq \sqrt{n} < a + \frac{1}{10},\ \left(a + \frac{1}{100}\right)^2 \leqq n < \left(a + \frac{1}{10}\right)^2 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\left(a + \frac{1}{100}\right)^2 \leqq a^2 + k < \left(a + \frac{1}{10}\right)^2$ となり，

$$\frac{a}{50} + \frac{1}{10000} \leqq k < \frac{a}{5} + \frac{1}{100} \cdots\cdots\cdots③$$

③を a について解くと，$\frac{a}{50} + \frac{1}{10000} \leqq k$ から $a \leqq 50k - \frac{1}{200}$，$k < \frac{a}{5} + \frac{1}{100}$ から $a > 5k - \frac{1}{20}$ となるので，

$$5k - \frac{1}{20} < a \leqq 50k - \frac{1}{200} \cdots\cdots\cdots④$$

さて，a が最小となるのは $k = 1$ のときで，④から $5 - \frac{1}{20} < a \leqq 50 - \frac{1}{200}$ なので，

$$a = 5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 49$$

よって，条件に当てはまる最小の n は，$n = 5^2 + 1 = 26$ である。

(2)　まず，$k = 2$ のとき，④から $10 - \frac{1}{20} < a \leqq 100 - \frac{1}{200}$ なので，

$$a = 10,\ 11,\ 12,\ \cdots,\ 99$$

また，$k = 3$ のとき，④から $15 - \frac{1}{20} < a \leqq 150 - \frac{1}{200}$ なので，

$$a = 15,\ 16,\ 17,\ \cdots,\ 149$$

さらに，$k \geqq 4$ のとき，④より $a \geqq 20$ となる。

以上より，条件に当てはまる n を小さい方から並べていくと，

$$5^2+1,\ 6^2+1,\ 7^2+1,\ 8^2+1,\ 9^2+1,\ 10^2+1,\ 10^2+2,\ 11^2+1,\ 11^2+2,$$
$$12^2+1,\ 12^2+2,\ \cdots\cdots$$

すると，10 番目に小さいものは，$12^2 + 1 = 145$ になる。

［解　説］

おもしろい整数問題です。条件を満たす n が「平方数＋ちょっと」というのは感覚的にもわかりますが，その「ちょっと」を数式で評価することがポイントです。具体的には，③すなわち④ですが。

4

問題のページへ

(1)　1, 2, 3 を一列に並べた順列$(a_1,\ a_2,\ a_3)$は，$3!=6$通りあり，

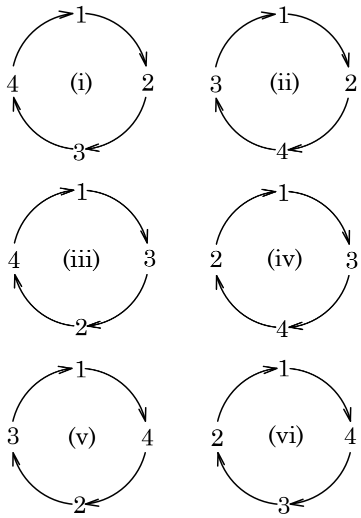
$(1,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 3,\ 2)$，$(2,\ 1,\ 3)$，$(2,\ 3,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 2)$，$(3,\ 2,\ 1)$

$a_i=i$という長さ 1 のサイクルを含むものは,

$(1,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 3,\ 2)$，$(2,\ 1,\ 3)$，$(3,\ 2,\ 1)$

これより，その確率は$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$となる。

(2)　1, 2, 3, 4 を一列に並べた順列$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$について，$a_i=j\rightarrow a_j=k\rightarrow a_k=l\rightarrow a_l=i$という長さ 4 のサイクルを含むものは，右図のように 1, 2, 3, 4 のすべてをサイクリックに並べて，



(i)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(2,\ 3,\ 4,\ 1)$

(ii)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(2,\ 4,\ 1,\ 3)$

(iii)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(3,\ 4,\ 2,\ 1)$

(iv)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(3,\ 1,\ 4,\ 2)$

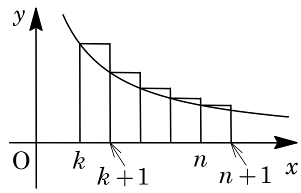
(v)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(4,\ 3,\ 1,\ 2)$

(vi)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(4,\ 1,\ 2,\ 3)$

(3)　$x>0$において$f(x)=\dfrac{1}{x}$は単調減少し，n 以下の正の整数kに対し，$k\leqq x\leqq k+1$のとき，

$f(k)\geqq f(x)$（等号は$x=k$のときのみ）

すると，右図から面積を比較して，



$$\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}>\int_k^{n+1}\frac{1}{x}dx=\big[\log x\big]_k^{n+1}=\log(n+1)-\log k$$

(4)　1, 2, ⋯, n（nは奇数）を一列に並べた順列が，長さr $\left(r\geqq\dfrac{n+1}{2}\right)$のサイクルを含むとき，$n-r\leqq\dfrac{n-1}{2}$より，選んだ順列$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$に含まれる長さ r のサイクルは，ただ 1 つだけ存在する。

さて，$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$が長さ$r$のサイクルを含むとき，$r$個の選び方が${}_n\mathrm{C}_r$通りで，それをサイクリックに並べるのが$(r-1)!$通りとなり，また残り$n-r$個の並べ方が$(n-r)!$通りであるので，このときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_r\cdot(r-1)!\cdot(n-r)!}{n!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{(r-1)!\cdot(n-r)!}{n!}=\frac{1}{r}$$

よって，選んだ順列が長さ$\dfrac{n+1}{2}$以上のサイクルを含む確率pは，(3)の結論から，

$$p=\sum_{r=\frac{n+1}{2}}^{n}\frac{1}{r}>\log(n+1)-\log\frac{n+1}{2}=\log\frac{(n+1)\cdot 2}{n+1}=\log 2$$

［解 説］

確率の総合問題です。具体例の(1)と(2)があるものの，題意を把握するのに時間がかかります。誘導になっている(2)において，円順列との対応を考える点がポイントです。なお，(3)は付加的な設問のため，やや雑に記しています。