1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。

(1) 整式 x^3 を 2 次式 $(x-a)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) 実数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x+b$ とする。b の値に応じて，このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ。

2

解答解説のページへ

1 つのサイコロを 3 回投げる。1 回目に出る目を a, 2 回目に出る目を b, 3 回目に出る目を c とする。なおサイコロは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする。

(1)　$ab+2c \geqq abc$ となる確率を求めよ。

(2)　$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

複素数平面上に，原点 O を頂点の 1 つとする正六角形 OABCDE が与えられている。ただしその頂点は時計の針の進む方向と逆向きに O, A, B, C, D, E とする。互いに異なる 0 でない複素数 α，β，γ が,

$$0 \leqq \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leqq \pi,\ \ 4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$$

$$2\gamma^2 - (3\alpha + \beta + 2)\gamma + (\alpha + 1)(\alpha + \beta) = 0$$

を満たし，α，β，γ のそれぞれが正六角形 OABCDE の頂点のいずれかであるとする。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求め，α，β がそれぞれどの頂点か答えよ。

(2) 組 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ をすべて求め，それぞれの組について正六角形 OABCDE を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0)=1$ を満たすとする。ただし $f(x)$ が区間 $x \geqq 0$ における増加関数であるとは，区間内の任意の実数 x_1，x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つときをいう。以下，n は正の整数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx = \infty$ を示せ。

(2) 区間 $y > 2$ において関数 $F_n(y)$ を $F_n(y) = \displaystyle\int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{x-2}dx$ と定めるとき，

$\displaystyle\lim_{y\to\infty} F_n(y) = \infty$ を示せ。また $2+\dfrac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2-x}dx = 0$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ。

(3) (2)の a_n について，不等式 $a_n < 4$ がすべての n に対して成り立つことを示せ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1)　x^3 を $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ で割ると，

$$x^3 = (x^2 - 2ax + a^2)(x + 2a) + 3a^2x - 2a^3$$

これより，求める余りは $3a^2x - 2a^3$ である。

(2)　x^3 を $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ で割ると，

$$x^3 = (x^2 + \alpha x + \beta)(x - \alpha) + (\alpha^2 - \beta)x + \alpha\beta$$

余りが $3x + b$ より，$\alpha^2 - \beta = 3$，$\alpha\beta = b$ となり，$b = \alpha(\alpha^2 - 3)$ ………(＊)

すると，1 つの α の値に対して β の値が 1 つ決まるので，b の値に応じて決まる $f(x)$ の個数は，(＊)を満たす α の個数が対応する。

そこで，$g(\alpha) = \alpha(\alpha^2 - 3) = \alpha^3 - 3\alpha$ とおくと，

$$g'(\alpha) = 3\alpha^2 - 3 = 3(\alpha + 1)(\alpha - 1)$$

これより，$g(\alpha)$ の増減は右表のようになるので，(＊)を満たす α の個数，すなわち $f(x)$ の個数は，

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$-2 < b < 2$ のとき 3 個，$b = \pm 2$ のとき 2 個，$b < -2$，$2 < b$ のとき 1 個

［解　説］

微分法の方程式への応用問題です。$f(x)$ の個数と，(＊)を満たす α の個数の対応関係がポイントです。

2

問題のページへ

(1)　サイコロを 3 回投げ，出る目を順に a，b，c とするとき，a，b の値とその積を表にまとめると，右のようになる。

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

さて，$ab+2c \geqq abc$ となる場合は，

(i)　$c=1$ のとき

$ab+2 \geqq ab$ より，任意の a，b で成り立つことより，$(a,\ b)$ の組は36通りである。

(ii)　$c=2$ のとき

$ab+4 \geqq 2ab$ から $ab \leqq 4$ となり，$(a,\ b)$ の組は$1+2+2+3=8$通りである。

(iii)　$c=3$ のとき

$ab+6 \geqq 3ab$ から $ab \leqq 3$ となり，$(a,\ b)$ の組は$1+2+2=5$通りである。

(iv)　$c=4$ のとき

$ab+8 \geqq 4ab$ から $ab \leqq \dfrac{8}{3}$ となり，$(a,\ b)$ の組は$1+2=3$通りである。

(v)　$c=5$ のとき

$ab+10 \geqq 5ab$ から $ab \leqq \dfrac{5}{2}$ となり，$(a,\ b)$ の組は$1+2=3$通りである。

(vi)　$c=6$ のとき

$ab+12 \geqq 6ab$ から $ab \leqq \dfrac{12}{5}$ となり，$(a,\ b)$ の組は$1+2=3$通りである。

(i)～(vi)より，$ab+2c \geqq abc$ となる確率は，

$$\frac{36+8+5+3+3+3}{6^3}=\frac{58}{6^3}=\frac{29}{108}$$

(2)　$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となるのは，ab が奇数の場合に限られるので，

(i)　$ab=1\ [(a,\ b)=(1,\ 1)]$ のとき

$1+2c$ と $2c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の 6 通りである。

(ii)　$ab=3\ [(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)]$ のとき

$3+2c$ と $6c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 4,\ 5$ の 4 通りである。

(iii)　$ab=5\ [(a,\ b)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)]$ のとき

$5+2c$ と $10c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$ の 5 通りである。

(iv)　$ab=9\ [(a,\ b)=(3,\ 3)]$ のとき

$9+2c$ と $18c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 4,\ 5$ の 4 通りである。

(v)　$ab=15\ [(a,\ b)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)]$ のとき

$15+2c$ と $30c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 4$ の 3 通りである。

(vi) $ab=25\,\left[\,(a,\ b)=(5,\ 5)\,\right]$のとき

$25+2c$ と $50c$ が互いに素となるのは，$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$ の 5 通りである。

(i)～(vi)より，$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率は,

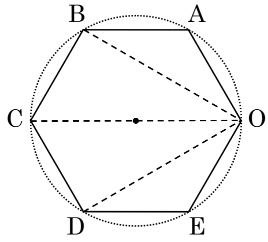
$$\frac{1\times6+2\times4+2\times5+1\times4+2\times3+1\times5}{6^3}=\frac{39}{6^3}=\frac{13}{72}$$

［解 説］

丁寧に数えるタイプの確率問題です。(1)では式の対称性から c の値で場合分けを行っています。また，(2)では奇数である ab の値に注目しています。なお，c の値を決めるのに，互除法を利用する手も考えられます。

3

問題のページへ



(1)　条件から，$4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0\ (\alpha\neq 0)$ なので，

$$4-2\cdot\frac{\beta}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=0,\quad \frac{\beta}{\alpha}=1\pm\sqrt{3}i$$

$0\leqq\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\leqq\pi$ より，$\dfrac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

これより，点 β は点 α を原点 O まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，O との距離を 2 倍にした点である。

そこで，正六角形 OABCDE について，$\mathrm{OA}=\mathrm{OE}=l$ とおくと，$\mathrm{OB}=\mathrm{OD}=\sqrt{3}l$，$\mathrm{OC}=2l$ となるので，α は頂点 A，β は頂点 C が対応する。

(2)　(1)から，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{C}(\beta)$ となり，$2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$ より，

$$(2\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-1)=0$$

$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のとき，点 γ は $\mathrm{A}(\alpha)$ と $\mathrm{C}(\beta)$ を結ぶ線分の中点になり，正六角形 OABCDE の頂点に対応しない。よって，$\gamma\neq\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ から $\gamma=\alpha+1$ である。

さて，γ が対応する頂点は，点 B，点 D，点 E となり，

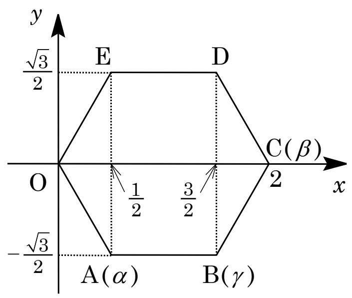
(i)　$\gamma=\alpha+1$ が点 B に対応するとき

点 B は点 A を原点 O のまわりに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転し，O との距離を $\sqrt{3}$ 倍にした点なので，$\alpha+1=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\alpha=\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha$ より，$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha=1$ となり，

$$\alpha=\frac{2}{1+\sqrt{3}i}=\frac{2(1-\sqrt{3}i)}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\beta=(1+\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2$$

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$



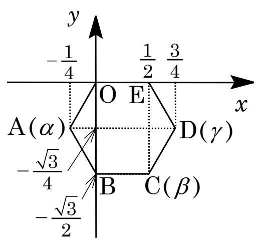
(ii)　$\gamma=\alpha+1$ が点 D に対応するとき

点 D は点 A を原点 O のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転し，O との距離を $\sqrt{3}$ 倍にした点なので，$\alpha+1=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\alpha=\sqrt{3}i\cdot\alpha$ より，$(-1+\sqrt{3}i)\alpha=1$ となり，

$$\alpha=\frac{1}{-1+\sqrt{3}i}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$\beta=(1+\sqrt{3}i)\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\gamma=\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)+1=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$$



(iii) $\gamma=\alpha+1$ が点 E に対応するとき

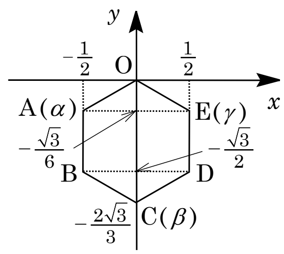
点 E は点 A を原点 O のまわりに $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点なので，

$\alpha+1=\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)\alpha=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha$ より，$\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha=1$ となり，

$$\alpha=\frac{2}{-3+\sqrt{3}i}=\frac{2(-3-\sqrt{3}i)}{12}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

$$\beta=(1+\sqrt{3}i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{3}i$$

$$\gamma=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)+1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$$



［解 説］

複素数平面上の図形についての問題です。うまく誘導が付けられていますが，ボリュームはかなりのものです。

4

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ で連続な増加関数 $f(x)$ が $f(0)=1$ を満たすとき，$0 \leqq x \leqq 2-\dfrac{1}{n}$ において，

$f(x) \geqq 1$ より，$\dfrac{f(x)}{2-x} \geqq \dfrac{1}{2-x}$ となり，

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx \geqq \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{2-x}dx = -\Big[\log|2-x|\Big]_0^{2-\frac{1}{n}} = \log n + \log 2 \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$n \to \infty$ のとき $\log n + \log 2 \to \infty$ より，①から，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx = \infty$$

(2)　$y>2$ において $F_n(y)=\displaystyle\int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{x-2}dx$ と定めるとき，$2+\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq y$ において，

$f(x) \geqq 1$ より，$\dfrac{f(x)}{x-2} \geqq \dfrac{1}{x-2}$ となり，

$$F_n(y) \geqq \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{1}{x-2}dx = \Big[\log|x-2|\Big]_{2+\frac{1}{n}}^{y} = \log(y-2) + \log n \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$y \to \infty$ のとき $\log(y-2)+\log n \to \infty$ より，②から

$$\lim_{y\to\infty} F_n(y) = \infty \cdots\cdots\cdots③$$

さて，$G_n(y)=\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{2-x}dx = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx - F_n(y)$ とおく。

すると，$y \geqq 2+\dfrac{1}{n}$ のとき，$G_n{}'(y) = -F_n{}'(y) = -\dfrac{f(y)}{y-2} < 0$ となり，$G_n(y)$ は単調に減少し，(1)から，

$$G_n\Big(2+\frac{1}{n}\Big) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx \geqq \log n + \log 2 > 0 \cdots\cdots\cdots④$$

また，③から，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} G_n(y) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx - \lim_{y\to\infty} F_n(y) = -\infty$

よって，$2+\dfrac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で，$G_n(a_n)=0$ となるものがただ 1 つ存在する。

(3)　$G_n(4)=\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{2-x}dx \cdots\cdots⑤$ となり，ここで $t=4-x$ とおくと，

$dt=-dx$ で，$x=2+\dfrac{1}{n} \to 4$ のとき $t=2-\dfrac{1}{n} \to 0$ となるので，

$$\int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{2-x}dx = \int_{2-\frac{1}{n}}^{0} \frac{f(4-t)}{t-2}\cdot(-dt) = -\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(4-t)}{2-t}dt$$

$$= -\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(4-x)}{2-x}dx \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑥を⑤に代入して，

$$G_n(4)=\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}dx-\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(4-x)}{2-x}dx=\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)-f(4-x)}{2-x}dx$$

ここで，$0\leqq x\leqq 2-\dfrac{1}{n}$ において，$f(x)$ は増加関数なので，$x<4-x$ から $f(x)<f(4-x)$ となり，$G_n(4)<0$ である。

すると，④と合わせて，$G_n(y)=0$ となる $y=a_n$ が $2+\dfrac{1}{n}<y<4$ にただ 1 つ存在することになる。すなわち，すべての n に対して $a_n<4$ である。

［解 説］

抽象的な関数を題材にした定積分の問題です。ポイントは，(3)の $t=4-x$ という変数変換です。これは，積分区間 $0\leqq x\leqq 2-\dfrac{1}{n}$ と $2+\dfrac{1}{n}\leqq x\leqq 4$ の対応を考えて，直線 $x=2$ に関する対称移動を表しています。