1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　方程式$x^3-3x^2-50=0$の実数解をすべて求めよ。

(2)　実数 p, q が $p+q=pq$ を満たすとする。$X=pq$ とおくとき，p^3+q^3 を X で表せ。

(3)　条件 $p^3+q^3=50$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$p<q$ を満たす 0 でない実数の組$(p,\ q)$をすべて求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

t を 0 でない実数として，x の関数 $y=-x^2+tx+t$ のグラフを C とする。

(1)　C 上において y 座標が最大となる点 P の座標を求めよ。

(2)　P と点 O(0, 0) を通る直線を l とする。l と C が P 以外の共有点 Q をもつために t が満たすべき条件を求めよ。また，そのとき，点 Q の座標を求めよ。

(3)　t は(2)の条件を満たすとする。A$(-1,\ -2)$ として，$X=\dfrac{1}{4}t^2+t$ とおくとき，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2$ を X で表せ。また，$\mathrm{AP}<\mathrm{AQ}$ となるために t が満たすべき条件を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とする。表と裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを n 回投げ，以下のように得点を決める。

・最初に数直線上の原点に石を置き，コインを投げて表なら 2，裏なら 3 だけ数直線上を正方向に石を移動させる。コインを k 回投げた後の石の位置を a_k とする。

・$a_n \neq 2n+2$ の場合は得点を 0，$a_n = 2n+2$ の場合は得点を $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。

たとえば，$n=3$ のとき，投げたコインが 3 回とも表のときは得点は 0，投げたコインが順に裏，裏，表のときは得点は $3+6+8=17$ である。

(1) n 回のうち裏の出る回数を r とするとき，a_n を求めよ。

(2) $n=4$ とする。得点が 0 でない確率および 25 である確率をそれぞれ求めよ。

(3) $n=9$ とする。得点が 100 である確率および奇数である確率をそれぞれ求めよ。

1

問題のページへ

(1)　方程式$x^3-3x^2-50=0$に対して，$(x-5)(x^2+2x+10)=0$

ここで，$x^2+2x+10=(x+1)^2+9>0$より，実数解は$x=5$だけである。

(2)　$X=p+q=pq$のとき，

$$p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)=X^3-3X^2\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　$p^3+q^3=50\cdots\cdots②$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\cdots\cdots③$に対して，③から，$p+q=pq$

そこで，$X=p+q=pq$とおくと，①②から，$X^3-3X^2=50$

すると，(1)の結果から$X=5$となり，$p+q=pq=5$

よって，0 でない実数$p, q\,(p<q)$は，2 次方程式$t^2-5t+5=0$の解となり，

$$p=\frac{5-\sqrt{5}}{2}，\ q=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

［解 説］

方程式を解く問題ですが，誘導なしでもよい内容です。

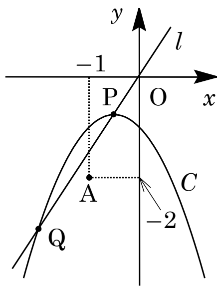
$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$C: y=-x^2+tx+t\ (t\neq 0)$ ……①に対して，$y=-\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{t^2}{4}+t$

これより，C 上で y 座標が最大となる点 P の座標は，$\mathrm{P}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4}+t\right)$である。

(2)　直線 OP すなわち l の傾きは$\left(\dfrac{t^2}{4}+t\right)\cdot\dfrac{2}{t}=\dfrac{t}{2}+2$ から，



$$l: y=\left(\frac{t}{2}+2\right)x \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$-x^2+tx+t=\left(\dfrac{t}{2}+2\right)x$ となり，

$$x^2+\left(-\frac{t}{2}+2\right)x-t=0,\ \left(x-\frac{t}{2}\right)(x+2)=0$$

これより，$x=\dfrac{t}{2}$，-2 となり，l と C が P 以外の共有点 Q をもつ条件は，$\dfrac{t}{2}\neq -2\ (t\neq -4)$ となる。すると，条件の $t\neq 0$ と合わせると，

$$t<-4,\ -4<t<0,\ 0<t \cdots\cdots\cdots (*)$$

点 Q は，$x=-2$，$y=\left(\dfrac{t}{2}+2\right)\cdot(-2)=-t-4$ から，$\mathrm{Q}(-2,\ -t-4)$ である。

(3)　$\mathrm{A}(-1,\ -2)$ に対して，$X=\dfrac{1}{4}t^2+t$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2=\left(\frac{t}{2}+1\right)^2+\left(\frac{t^2}{4}+t+2\right)^2=\frac{t^2}{4}+t+1+(X+2)^2=X+1+(X+2)^2$$
$$=X^2+5X+5$$
$$\mathrm{AQ}^2=(-2+1)^2+(-t-4+2)^2=1+t^2+4t+4=4X+5$$

これより，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2=(X^2+5X+5)-(4X+5)=X^2+X$ である。

さて，$\mathrm{AP}<\mathrm{AQ}$ のとき，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2<0$ から $X^2+X<0$ となり，$X(X+1)<0$

$$-1<X<0,\ -1<\frac{1}{4}t^2+t<0 \cdots\cdots\cdots ③$$

$-1<\dfrac{1}{4}t^2+t$ に対して，$t^2+4t+4>0$ となり，$(t+2)^2>0$ から $t\neq -2$

$\dfrac{1}{4}t^2+t<0$ に対して，$t^2+4t<0$ となり，$t(t+4)<0$ から $-4<t<0$

よって，③の解は，$-4<t<-2$，$-2<t<0$ となり，(＊)と合わせると，

$$-4<t<-2,\ -2<t<0$$

［解　説］

放物線と直線の問題です。非常にていねいな誘導がついています。

3

問題のページへ

(1)　初め原点にある石について，コインを投げて表なら 2，裏なら 3 だけ数直線上を正方向に移動させる。そして，コインを n 回投げた後の石の位置を a_n とする。

ここで，裏が r 回，表が $n-r$ 回出たとき，

$$a_n=3r+2(n-r)=2n+r\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$a_n\neq 2n+2$ のとき得点 0，$a_n=2n+2$ のとき得点 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ とする。

さて，$n=4$ のとき，裏が r 回ならば，$(*)$より $a_4=2\cdot 4+r=r+8$ となり，得点が 0 でないのは，$a_4=2\cdot 4+2=10$ から $r+8=10$ なので，$r=2$ である。

すなわち，裏が 2 回，表が 2 回出る場合より，その確率は，

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{2^4}=\frac{3}{8}$$

このとき，裏が出ることを●，表が出ることを○で表し，得点を計算すると，

・●→●→○→○のとき　得点は $3+6+8+10=27$

・●→○→●→○のとき　得点は $3+5+8+10=26$

・●→○→○→●のとき　得点は $3+5+7+10=25$

・○→●→●→○のとき　得点は $2+5+8+10=25$

・○→●→○→●のとき　得点は $2+5+7+10=24$

・○→○→●→●のとき　得点は $2+4+7+10=23$

これより，得点が 25 である確率は，$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{2^4}=\frac{1}{8}$ である。

(3)　$n=9$ のとき，裏が r 回ならば，$(*)$より $a_9=2\cdot 9+r=r+18$ となり，得点が 0 でないのは，$a_9=2\cdot 9+2=20$ から $r+18=20$ なので，$r=2$ である。

すなわち，裏が 2 回，表が 7 回出る場合となる。

ここで，裏が p 回目と q 回目 $(1\leqq p<q\leqq 9)$ に出るとすると，$p\geqq 2$ のとき，

$$a_k=2k\ (1\leqq k\leqq p-1),\ a_k=2k+1\ (p\leqq k\leqq q-1)$$

$$a_k=2k+2\ (q\leqq k\leqq 9)$$

さて，$S_9=a_1+a_2+\cdots+a_9$ とおくと，

$$S_9=\sum_{k=1}^{p-1}2k+\sum_{k=p}^{q-1}(2k+1)+\sum_{k=q}^{9}(2k+2)=\sum_{k=1}^{9}2k+\sum_{k=p}^{9}1+\sum_{k=q}^{9}1$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10+(9-p+1)+(9-q+1)=110-p-q$$

なお，この式は $p=1$ のときも成立している。

これより，得点が 100 であるのは，$110-p-q=100$ より $p+q=10$ となり，

$$(p,\ q)=(1,\ 9),\ (2,\ 8),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)$$

この確率は，$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{4}{2^9}=\frac{1}{128}$ となる。

また，得点が奇数であるのは $p+q$ が奇数の場合で，$p=1,\ 3,\ 5,\ 7$ に対して $(p,\ q)$ はそれぞれ 4, 3, 2, 1 通り，$p=2,\ 4,\ 6,\ 8$ に対して $(p,\ q)$ はそれぞれ 4, 3, 2, 1 通りとなり，合わせて，

$$(4+3+2+1)+(4+3+2+1)=20 \ \text{（通り）}$$

よって，この確率は，$20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{20}{2^9}=\frac{5}{128}$ となる。

［解　説］

設定がやや複雑な確率の問題です。具体的に処理した(2)をもとに，(3)の設問を考えています。