1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\ (x>0)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ から C にちょうど 2 本の接線を引くことができるとする。そのような実数 t の値の範囲を求めよ。

(3)　(2)において，C の 2 つの接点の x 座標を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。α，β がともに整数であるような組 $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

c を 1 より大きい実数とする。また，i を虚数単位として，$\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく。複素数 z に対して，

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c,\quad Q(z) = -\alpha^7 z^3 + 3\alpha^6 z^2 + (c+2)\alpha z - c$$

と定める。

(1)　方程式 $P(z)=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ。

(2)　方程式 $Q(z)=0$ を満たす複素数 z のうち実部が最大のものを求めよ。

(3)　複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z)=0$，$Q(z)=0$ が共通解 β をもつとする。そのときの c の値と β を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標空間の 3 点 $A(3,\ 1,\ 3)$，$B(4,\ 2,\ 2)$，$C(4,\ 0,\ 1)$ の定める平面を H とする。また，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ($s,\ t$ は非負の実数) を満たすすべての点 P からなる領域を K とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。

(2) 原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ から平面 H に下ろした垂線の足を Q とする。$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(3) 領域 K 上の点 P に対して，線分 QP 上の点で $\overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$ (r は非負の実数) を満たす点 R が存在することを示せ。

(4) 領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ。

4

解答解説のページへ

袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を p $(0 \leqq p \leqq 1)$ とする。袋から無作為に玉を 1 つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行を n 回行うとき，赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく。

(1)　$n \geqq 2$ に対して，$f(1)$ と $f(2)$ を求めよ。

(2)　$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，等式 $f(k)=\dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\displaystyle\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx$ を示せ。

(3)　自然数 k に対して，定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx$ を求めよ。

1

問題のページへ

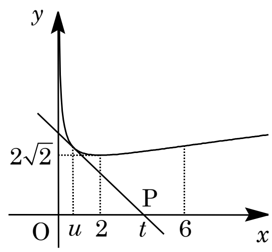
(1)　$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}\ (x>0)$に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{x-2}{2x\sqrt{x}}$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2\sqrt{2}$	↗

これより，$f(x)$の増減は右表のようになり，$f(x)$は$x=2$のとき極小値$2\sqrt{2}$をとる。

(2)　$f''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{x-6}{4x^2\sqrt{x}}$から，$y=f(x)$のグラフ C は$0<x<6$で下に凸，$x>6$で上に凸であり，その概形は右図のようになる。



さて，C上の点$(u,\ f(u))\ (u>0)$における接線は，

$$y-\left(\sqrt{u}+\frac{2}{\sqrt{u}}\right)=\frac{u-2}{2u\sqrt{u}}(x-u)$$

点$\mathrm{P}(t,\ 0)$を通ることより，$-\left(\sqrt{u}+\dfrac{2}{\sqrt{u}}\right)=\dfrac{u-2}{2u\sqrt{u}}(t-u)$となり，

$$-2u^2-4u=(u-2)(t-u)\,,\ u^2+(t+6)u-2t=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，点 P から C に 2 本の接線を引くことができる条件は，①が正の異なる 2 つの解をもつことに対応し，$g(u)=u^2+(t+6)u-2t$とおくと，

$$g(u)=\left(u+\frac{t+6}{2}\right)^2-\frac{t^2+20t+36}{4}=\left(u+\frac{t+6}{2}\right)^2-\frac{(t+2)(t+18)}{4}$$

すると，$-\dfrac{t+6}{2}>0\cdots\cdots②$，$-\dfrac{(t+2)(t+18)}{4}<0\cdots\cdots③$，$g(0)=-2t>0\ \cdots\cdots④$

②から$t<-6$，③から$t<-18$，$-2<t$，④から$t<0$となる。

よって，求めるtの値の範囲は，$t<-18$である。

(3)　Cの 2 つの接点のx座標は①の解に対応し，これを$u=\alpha$，$\beta\ (\alpha<\beta)$とおくと，

$$\alpha+\beta=-(t+6)\cdots\cdots\cdots⑤,\ \alpha\beta=-2t\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より$t=-(\alpha+\beta+6)$となり，⑥に代入すると$\alpha\beta=2(\alpha+\beta+6)$から，

$$\alpha\beta-2\alpha-2\beta=12\,,\ (\alpha-2)(\beta-2)=16$$

ここで，$0<\alpha<\beta$から，$-2<\alpha-2<\beta-2$となり，

$$(\alpha-2,\ \beta-2)=(1,\ 16),\ (2,\ 8)$$

したがって，$(\alpha,\ \beta)=(3,\ 18),\ (4,\ 10)$である。

［解　説］

接線の本数を題材にした頻出の問題です。(2)の結論が意表をつくものでしたので，Cの凹凸も調べました。なお，複接線がないことは，直接的には触れていません。

2

問題のページへ

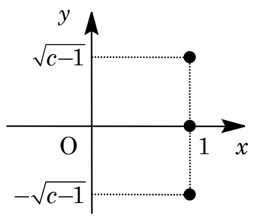
(1)　$P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c$ に対して，

$$P(z)=(z-1)(z^2-2z+c)$$

これより，方程式 $P(z)=0$ を満たす z は，$c>1$ より，

$$z=1,\ z=1\pm\sqrt{1-c}=1\pm\sqrt{c-1}\,i$$

複素数平面上に図示すると，右図の 3 点である。



(2)　$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ に対し，$\alpha^4=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=-1$ から，

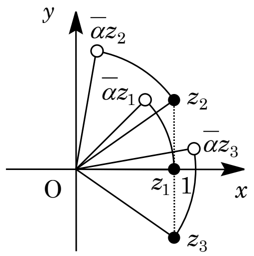
$$Q(z)=-\alpha^7z^3+3\alpha^6z^2+(c+2)\alpha z-c=\alpha^3z^3-3\alpha^2z^2+(c+2)\alpha z-c$$

これより，方程式 $Q(z)=0$ を満たす αz は，(1)より $\alpha z=1$，$\alpha z=1\pm\sqrt{c-1}\,i$

ここで，$|\alpha|=1$ から $\alpha\overline{\alpha}=1$ となり，$\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ から，

$$z=\frac{1}{\alpha}=\overline{\alpha},\ z=\frac{1}{\alpha}(1\pm\sqrt{c-1}\,i)=\overline{\alpha}(1\pm\sqrt{c-1}\,i)$$

$P(z)=0$ の解を $z_1=1$，$z_2=1+\sqrt{c-1}\,i$，$z_3=1-\sqrt{c-1}\,i$ とおくと，$Q(z)=0$ の解は $\overline{\alpha}z_1$，$\overline{\alpha}z_2$，$\overline{\alpha}z_3$ となり，複素数平面上で z_1，z_2，z_3 を原点まわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点となる。



$\overline{\alpha}z_1=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ の実部は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\overline{\alpha}z_2=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1}\,i)$ の実部は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1})$，$\overline{\alpha}z_3=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1}\,i)$ の実部は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1})$ である。

すると，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1})<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1})$ から，実部が最大のものは，

$$\overline{\alpha}z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1})+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1})i$$

(3)　2 つの方程式 $P(z)=0$，$Q(z)=0$ が共通解 β をもつとき，$\overline{\alpha}z_1$ と $\overline{\alpha}z_2$ は実部が 1 より小であること，$|\overline{\alpha}z_3|=|z_2|=\sqrt{c}>1$ に注目すると，$\beta=\overline{\alpha}z_3=z_2$ となり，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1})+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1})i=1+\sqrt{c-1}\,i$$

すると，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1})=1$ ……①，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1})=\sqrt{c-1}$ ……②である。

①から $\sqrt{c-1}=\sqrt{2}-1$ となり，これは②を満たすので，

$$c=(\sqrt{2}-1)^2+1=4-2\sqrt{2},\ \beta=1+(\sqrt{2}-1)i$$

［解 説］

高次方程式と複素数平面の問題です。$P(z)$ と $Q(z)$ の式の類似性に着目することが，解くための第一歩です。

3

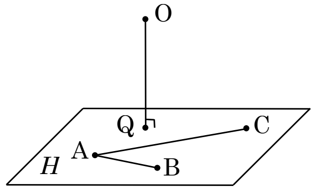
問題のページへ

(1)　3 点 A(3, 1, 3)，B(4, 2, 2)，C(4, 0, 1) の定める平面 H に対して,

$$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{AC}=(1,\ -1,\ -2)$$

すると，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=1+1+1=3$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=1+1+4=6$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1-1+2=2$

(2)　$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ ($k,\ l$ は実数) とおくと，OQ $\perp H$ から，$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AC}$ となる。



$$(\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

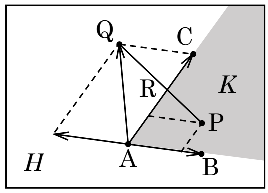
$$(\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=3+1-3=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=3-1-6=-4$ となる。

①から $1+3k+2l=0$，②から $-4+2k+6l=0$ なので，$k=-1$，$l=1$ となり，

$$\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\ \cdots\cdots\cdots③$$

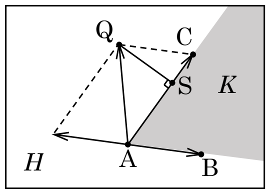
(3)　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ($s\geqq 0,\ t\geqq 0$) を満たすすべての点 P からなる領域 K は，右図の網点部である。



すると，③から点 Q と領域 K は半直線 AC に関して反対側にあり，線分 QP は半直線 AC と交わる。その交点を R とすると，$\overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$ を満たす非負の実数 r が存在する。

(4)　領域 K 上の点 P に対して，OQ $\perp H$ から，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OQ}^2+\mathrm{QP}^2}$$



これより，OP が最小となるのは QP が最小のときであり，このとき点 P は，点 Q から半直線 AC に下ろした垂線と半直線 AC との交点 S に一致する。

ここで，$\overrightarrow{AS}=s\overrightarrow{AC}$ とおくと，③から，

$$\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+(s-1)\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{QS}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より $2+6(s-1)=0$ となり，$s-1=-\dfrac{1}{3}$ から $s=\dfrac{2}{3}$ なので，

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=(3,\ 1,\ 3)+\frac{2}{3}(1,\ -1,\ -2)=\left(\frac{11}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

したがって，$\mathrm{S}\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$ である。

[解　説]

空間ベクトルの応用問題です。誘導が非常に細かく，しかも丁寧です。

4

問題のページへ

赤玉の割合 p の袋から無作為に玉を 1 つ取り出して袋に戻す試行を n 回行うとき，赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく。

(1)　$n \geqq 2$ のとき，赤玉を 1 回以上取り出す確率 $f(1)$ は，$f(1) = 1-(1-p)^n$

また，赤玉を 2 回以上取り出す確率 $f(2)$ は，

$$f(2) = f(1) - {}_n\mathrm{C}_1\, p(1-p)^{n-1} = 1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1}$$

(2)　$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，$f(k) = \dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\displaystyle\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx$ ……①

が成立することを数学的帰納法により示す。

(i)　$k=1$ のとき

$$f(1) = \frac{n!}{0!\,(n-1)!}\int_0^p x^0(1-x)^{n-1}dx = n\int_0^p (1-x)^{n-1}dx = -\Big[(1-x)^n\Big]_0^p$$

$$= -\{(1-p)^n - 1\} = 1-(1-p)^n$$

(1)より，$k=1$ のとき①は成立している。

(ii)　$k = l\ (1 \leqq l \leqq n-1)$ のとき

$f(l) = \dfrac{n!}{(l-1)!\,(n-l)!}\displaystyle\int_0^p x^{l-1}(1-x)^{n-l}dx$ が成立すると仮定する。

$$f(l+1) = f(l) - {}_n\mathrm{C}_l\, p^l(1-p)^{n-l} = f(l) - \frac{n!}{l!\,(n-l)!}p^l(1-p)^{n-l}$$

$$= \frac{n!}{(l-1)!\,(n-l)!}\left\{\int_0^p x^{l-1}(1-x)^{n-l}dx - \frac{1}{l}p^l(1-p)^{n-l}\right\}$$

ここで，$J = \displaystyle\int_0^p x^{l-1}(1-x)^{n-l}dx$ とおき，部分積分を適用すると，

$$J = \Big[\frac{1}{l}x^l(1-x)^{n-l}\Big]_0^p + \frac{n-l}{l}\int_0^p x^l(1-x)^{n-l-1}dx$$

$$= \frac{1}{l}p^l(1-p)^{n-l} + \frac{n-l}{l}\int_0^p x^l(1-x)^{n-l-1}dx$$

すると，$J - \dfrac{1}{l}p^l(1-p)^{n-l} = \dfrac{n-l}{l}\displaystyle\int_0^p x^l(1-x)^{n-l-1}dx$ となり，

$$f(l+1) = \frac{n!}{(l-1)!\,(n-l)!}\cdot\frac{n-l}{l}\int_0^p x^l(1-x)^{n-l-1}dx$$

$$= \frac{n!}{l!\,(n-l-1)!}\int_0^p x^l(1-x)^{n-l-1}dx$$

これより，$k = l+1$ のとき①は成立している。

(i)(ii)より，$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，①は成立する。

(3)　$p = \dfrac{1}{2}$ のとき，①から $f(k+1)$ は，

$$f(k+1) = \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^{n-k-1}dx \cdots\cdots②$$

ここで，$n-k-1=k\ (n=2k+1)$ のとき，②から，

$$f(k+1)=\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\int_0^{\frac{1}{2}}x^k(1-x)^k\,dx$$

すると，$I=\int_0^{\frac{1}{2}}x^k(1-x)^k\,dx$ より，$f(k+1)=\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}I$ となり，

$$I=\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}f(k+1)\cdots\cdots\cdots③$$

さて，$f(k+1)$ は，赤玉の割合 $\frac{1}{2}$ の袋に対して，試行を $2k+1$ 回行うとき，赤玉を $k+1$ 回以上取り出す確率なので，

$$f(k+1)=\left({}_{2k+1}\mathrm{C}_{k+1}+\cdots+{}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k}+{}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$2^{2k+1}=(1+1)^{2k+1}$ として，二項定理を適用すると，

$$2^{2k+1}={}_{2k+1}\mathrm{C}_0+{}_{2k+1}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{2k+1}\mathrm{C}_k+{}_{2k+1}\mathrm{C}_{k+1}+\cdots+{}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k}+{}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k+1}$$

$${}_{2k+1}\mathrm{C}_{k+1}+\cdots+{}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k}+{}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k+1}={}_{2k+1}\mathrm{C}_0+{}_{2k+1}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{2k+1}\mathrm{C}_k$$

すると，${}_{2k+1}\mathrm{C}_{k+1}+\cdots+{}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k}+{}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k+1}=\frac{1}{2}\cdot 2^{2k+1}=2^{2k}$ となり，③④より，

$$I=\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot 2^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=\frac{(k!)^2}{2\cdot(2k+1)!}$$

［解 説］

確率と定積分の融合問題です。(2)の設問は，(1)を誘導と考え，数学的帰納法の利用という方針を立てています。なお，(3)の $f(k+1)=\frac{1}{2}$ には二項定理を用いていますが，意味を考えれば当たり前でした。一瞬怯みましたが……。