

1

解答例のページへ

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 x を変数とする関数 $f(x)$ が導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち、すべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすとする。さらに以下の極限值 a, b ($a < b$) が存在すると仮定する。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b$$

このとき、 $a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し、関数 $g(x) = cx - f(x)$ の値を最大にする $x = x_0$ がただひとつ存在することを示せ。

- (2) 実数 x を変数とする関数 $f(x) = \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ はすべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすことを示せ。また、この f に対し小問(1)の極限值 a, b を求めよ。
- (3) 小問(2)の関数 f および極限值 a, b を考える。 $a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し小問(1)の x_0 および $g(x_0)$ を c を用いて表せ。

2[解答例のページへ](#)

整数 a, b, c に対し次の条件を考える。 $(*) \quad a \geq b \geq 0$ かつ $a^2 - b^2 = c$

以下の問いに答えよ。

- (1) $c = 24, 25, 26$ それぞれの場合に条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (2) p は 3 以上の素数, n は正の整数, $c = 4p^{2n}$ とする。このとき, 条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

3[解答例のページへ](#)

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 r, α は $0 < r \leq 1, 0 \leq \alpha < \pi$ をみたすとする。 xy 平面内で、点 $(1, 0)$ を中心にもつ半径 r の円周およびその内部を C とする。 C を原点 $(0, 0)$ を中心に反時計まわりに角度 α だけ回転させるとき、 C が通過する領域の面積を求めよ。
- (2) 実数 R, α は $0 < R \leq 1, 0 \leq \alpha < \pi$ をみたすとする。 xyz 空間内で、点 $(1, 0, 0)$ を中心にもつ半径 R の球面およびその内部を B とする。 B を z 軸のまわりに角度 α だけ回転させるとき、 B が通過する領域の体積を求めよ。ただし、回転の向きは回転後の B の中心が $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ になるように選ぶものとする。

4

解答例のページへ

コイン①, …, ⑥が右図のようにマス目の中に置かれている。

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び、選んだコインはそのままにし、そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える。例えば、①を選べば、②, ④を裏返し、②を選べば、①, ③, ⑤を裏返す。最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする。正の整数 n に対し、 n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) コイン①, …, ⑥をグループ A , B に分けることによって、 n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる。
 n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ、 B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる。
 どのようにグループ分けすればよいかを答えよ。
- (3) p_4 を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $f(x)$ が $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b$, $f''(x) > 0$ をみたすとき, $a < c < b$ を

みたす任意の実数 c に対し, $g(x) = cx - f(x)$ とおくと, $g(x)$, $g'(x)$ は連続で,

$$g'(x) = c - f'(x), \quad g''(x) = -f''(x) < 0$$

すると, $g'(x)$ はすべての x に対して単調に減少し,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = c - a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = c - b < 0$$

これより, $g'(x)$ は $g'(\alpha) = 0$ となる α がただひとつ存在する。

このとき, $g(x)$ は増減が右表のようになり, $x = \alpha$ で
最大値をとる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

したがって, $x_0 = \alpha$ とおくと, $g(x)$ の値を最大にする

$x = x_0$ がただひとつ存在することになる。

$$(2) \quad f(x) = \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \text{ に対して, } f'(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4e^x e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

ここで, $f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ と変形すると,

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

$$(3) \quad -1 < c < 1 \text{ において, } g'(x_0) = c - f'(x_0) = 0 \text{ より, } \frac{e^{2x_0} - 1}{e^{2x_0} + 1} = c \text{ となるので,}$$

$$e^{2x_0} - 1 = c(e^{2x_0} + 1), \quad (1 - c)e^{2x_0} = 1 + c, \quad e^{2x_0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

すると, $2x_0 = \log\left(\frac{1 + c}{1 - c}\right)$ から, $x_0 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + c}{1 - c}\right)$ である。

そして, $e^{x_0} = \sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}}$ から, $e^{x_0} + e^{-x_0} = \sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}} + \sqrt{\frac{1 - c}{1 + c}} = \frac{2}{\sqrt{1 - c}\sqrt{1 + c}}$ となり,

$$f(x_0) = \log\left(\frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 - c}\sqrt{1 + c}}\right) = -\frac{1}{2} \log(1 - c)(1 + c) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} g(x_0) &= cx_0 - f(x_0) = \frac{c}{2} \log\left(\frac{1 + c}{1 - c}\right) + \frac{1}{2} \log(1 - c)(1 + c) \\ &= \frac{c}{2} \log(1 + c) - \frac{c}{2} \log(1 - c) + \frac{1}{2} \log(1 - c) + \frac{1}{2} \log(1 + c) \\ &= \frac{1}{2} (1 + c) \log(1 + c) + \frac{1}{2} (1 - c) \log(1 - c) \end{aligned}$$

[コメント]

微分と増減の問題です。(1)では, グラフを頭の中で描きながら計算を進めます。

2

問題のページへ

- (1) 整数 a, b, c に対して, $a \geq b \geq 0$ かつ $a^2 - b^2 = c \cdots \cdots (*)$

このとき, $(a+b)(a-b) = c$ となり, $a+b$ と $a-b$ は c の約数である。

さらに, $a+b \geq a-b \geq 0$ であり, $(a+b) - (a-b) = 2b$ から $2b$ が偶数なので, $a+b$ と $a-b$ の偶奇は一致する。

・ $c = 24$ のとき $(a+b)(a-b) = 2^3 \cdot 3$ となり, $(a+b, a-b) = (12, 2), (6, 4)$

$(*)$ をみたす (a, b) は, $(a, b) = (7, 5), (5, 1)$ である。

・ $c = 25$ のとき $(a+b)(a-b) = 5^2$ となり, $(a+b, a-b) = (25, 1), (5, 5)$

$(*)$ をみたす (a, b) は, $(a, b) = (13, 12), (5, 0)$ である。

・ $c = 26$ のとき $(a+b)(a-b) = 2 \cdot 13$ となり, みたす $(a+b, a-b)$ はない。

$(*)$ をみたす (a, b) は存在しない。

- (2) $c = 4p^{2n}$ (p は 3 以上の素数, n は正の整数) のとき, $(*)$ から

$$(a+b)(a-b) = 2^2 \cdot p^{2n} \quad (a+b \geq a-b \geq 0)$$

ここで, p は奇数から p^{2n} は奇数となり, $(*)$ をみたす $(a+b, a-b)$ はともに偶数となることより, $4p^{2n}$ を 2 つの偶数の積に分けると考えて,

$$(a+b, a-b) = (2p^{2n}, 2), (2p^{2n-1}, 2p), \cdots, (2p^n, 2p^n)$$

すると, $i = 0, 1, \cdots, n$ として, $(a+b, a-b) = (2p^{2n-i}, 2p^i)$ から,

$$(a, b) = \left(\frac{2p^{2n-i} + 2p^i}{2}, \frac{2p^{2n-i} - 2p^i}{2} \right) = (p^{2n-i} + p^i, p^{2n-i} - p^i)$$

[コメント]

約数・倍数の関係をもとにした不定方程式の問題です。 $(*)$ をみたす $a+b$ と $a-b$ の偶奇が一致する点に要注目です。

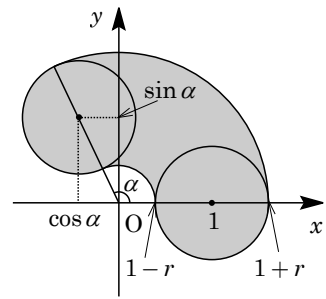
3

問題のページへ

- (1) $0 < r \leq 1$, $0 \leq \alpha < \pi$ のとき, $C: (x-1)^2 + y^2 \leq r^2$

を原点中心に反時計まわりに角度 α だけ回転させるとき,
 C が通過する領域は右図の網点部となり, その面積を S
 とおくと,

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 + \frac{1}{2} (1+r)^2 \alpha - \frac{1}{2} (1-r)^2 \alpha \\ &= \pi r^2 + \frac{1}{2} \cdot 4r\alpha = \pi r^2 + 2r\alpha \cdots \cdots (*) \end{aligned}$$



- (2) $0 < R \leq 1$, $0 \leq \alpha < \pi$ のとき, $B: (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ を, $-R \leq k \leq R$ として平面 $z=k$ で切断したとき, この平面上での切り口は,

$$(x-1)^2 + y^2 \leq R^2 - k^2, \quad z = k$$

すなわち, 点 $(1, 0, k)$ を中心にもつ半径 $\sqrt{R^2 - k^2}$ の円周およびその内部である。

そして, B を z 軸のまわりに角度 α だけ回転させるとき, 平面 $z=k$ 上で B が通過する領域の面積 $S(k)$ は, $(*)$ の r を $\sqrt{R^2 - k^2}$ に置き換えて,

$$S(k) = \pi (\sqrt{R^2 - k^2})^2 + 2\sqrt{R^2 - k^2} \alpha = \pi (R^2 - k^2) + 2\sqrt{R^2 - k^2} \alpha$$

これより, B が通過する領域の体積 V は, $z=0$ に関する対称性に注意すると,

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^R S(k) dk = 2 \int_0^R \{ \pi (R^2 - k^2) + 2\sqrt{R^2 - k^2} \alpha \} dk \\ &= 2\pi \int_0^R (R^2 - k^2) dk + 4\alpha \int_0^R \sqrt{R^2 - k^2} dk \\ &= 2\pi \left[R^2 k - \frac{k^3}{3} \right]_0^R + 4\alpha \cdot \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 + \pi R^2 \alpha \end{aligned}$$

[コメント]

立体の体積を求める問題です。(1)の結果を利用すると, (2)の結論はスムーズに求まります。

4

問題のページへ

- (1) 最初、すべてのコインが表向きであったとき、与えられたコインの操作を、「選んだコイン」、そのとき「裏返すコイン」、その「回数」としてまとめると、右表のようになる。

なお、どのコインを選ぶ確率も $\frac{1}{6}$ である。

さて、2 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きとなるのは、②→⑤または⑤→②と選ぶとき、すなわち $x_2 = x_5 = 1$ のときであり、その確率 p_2 は、

$$p_2 = 2! \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

選んだ コイン	裏返す コイン	回数
①	②, ④	x_1
②	①, ③, ⑤	x_2
③	②, ⑥	x_3
④	①, ⑤	x_4
⑤	②, ④, ⑥	x_5
⑥	③, ⑤	x_6

- (2) n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるのは、

- ・ ①のコインに対して $x_2 + x_4$ が奇数………㉑
- ・ ②のコインに対して $x_1 + x_3 + x_5$ が奇数………㉒
- ・ ③のコインに対して $x_2 + x_6$ が奇数………㉓
- ・ ④のコインに対して $x_1 + x_5$ が奇数………㉔
- ・ ⑤のコインに対して $x_2 + x_4 + x_6$ が奇数………㉕
- ・ ⑥のコインに対して $x_3 + x_5$ が奇数………㉖

すると、㉒㉕から $n = (x_1 + x_3 + x_5) + (x_2 + x_4 + x_6)$ が偶数のもとで、

㉒㉖から $x_1 = (x_1 + x_3 + x_5) - (x_3 + x_5)$ は偶数となり、㉔から x_5 は奇数である。

㉒㉔から $x_3 = (x_1 + x_3 + x_5) - (x_1 + x_5)$ は偶数となる。

㉓㉕から $x_4 = (x_2 + x_4 + x_6) - (x_2 + x_6)$ は偶数となり、㉑から x_2 は奇数である。

㉑㉕から $x_6 = (x_2 + x_4 + x_6) - (x_2 + x_4)$ は偶数となる。

これより、 x_2, x_5 は奇数、 x_1, x_3, x_4, x_6 は偶数となり、逆に、このとき㉑～㉖はすべて成り立つ。

したがって、コインを $A = \{②, ⑤\}$ 、 $B = \{①, ③, ④, ⑥\}$ と分けるとき、 n 回目の操作終了時点までに、 A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ、 B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる。

- (3) 4 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きとなるのは、(2)の結論から、次のようにコインが選ばれるときであり、それぞれの確率は、

(i) ②が 1 回、⑤が 3 回 ($x_2 = 1, x_5 = 3$) のとき $\frac{4!}{3!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{4}{6^4}$

(ii) ②が 3 回、⑤が 1 回 ($x_2 = 3, x_5 = 1$) のとき $\frac{4!}{3!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{4}{6^4}$

$$(iii) \text{ ②が1回, ⑤が1回, ①が2回 } (x_2 = x_5 = 1, x_1 = 2) \text{ のとき } \frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{12}{6^4}$$

$$(iv) \text{ ②が1回, ⑤が1回, ③が2回 } (x_2 = x_5 = 1, x_3 = 2) \text{ のとき } \frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{12}{6^4}$$

$$(v) \text{ ②が1回, ⑤が1回, ④が2回 } (x_2 = x_5 = 1, x_4 = 2) \text{ のとき } \frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{12}{6^4}$$

$$(vi) \text{ ②が1回, ⑤が1回, ⑥が2回 } (x_2 = x_5 = 1, x_6 = 2) \text{ のとき } \frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{12}{6^4}$$

$$(i) \sim (vi) \text{ より, } p_4 = \frac{4}{6^4} \times 2 + \frac{12}{6^4} \times 4 = \frac{56}{6^4} = \frac{7}{162} \text{ である。}$$

[コメント]

記述の丁寧さが問われる確率問題です。(3)の p_4 の計算には, (2)の結論が強力な誘導になっています。