**1**

解答解説のページへ

座標平面上に放物線 $y=-x^2+4$ と直線 $l: y=x+k$ を考える。

(1)　放物線と直線 $l$ が異なる 2 個の共有点をもつような $k$ の範囲を求めよ。

(2)　$k$ は(1)で求めた条件をみたすとして，さらに $k>0$ とする。(1)の 2 つの共有点を P, Q とし, O を原点とするとき，三角形 OPQ の面積を最大にする $k$ の値，およびそのときの面積を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

座標平面上に 4 点A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1)を頂点とする正方形を考え, この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする。さらに, 点 Q は, $x$ 軸と平行な方向の移動について確率 $p$, $y$ 軸と平行な方向の移動について確率$1-p$で移動しているものとする。最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき, $n$ 秒後に頂点 A, C にいる確率をそれぞれ$a_n$, $c_n$とする。

(1)　$a_2$, $c_2$, $a_4$, $c_4$を求めよ。

(2)　$a_{2n}$を求めよ。

3a

解答解説のページへ

$N$ を自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ をみたすとして，以下の級数和 $S_1$，$S_2$ の値を求めよ。ただし，ここで $i$ は虚数単位（$i^2=-1$）である。

(1)　$S_1=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{N-1}$

(2)　$S_2=1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots\cdots+\cos(N-1)\theta$

3b

解答解説のページへ

2 つの実数 $a, b$ $\left(a \neq -\dfrac{1}{2}\right)$に対し，$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ とし, $E$ を単位行列とする。

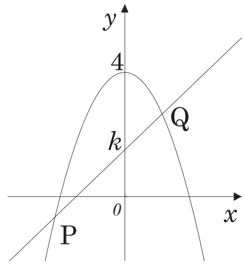
(1)　等式 $A_2(E + 2A_1) = -A_1$ をみたす行列 $A_2$ を求めよ。

(2)　自然数 $n$ に対して，等式 $A_{n+1}(E + 2A_n) = -A_n$ により順に $A_2$，$A_3, \cdots$ を定める。$A_n$ を求めよ。

## 1

問題のページへ

(1)　放物線 $y=-x^2+4$ と直線 $y=x+k$ の共有点が 2 個存在することより，




$$-x^2+4=x+k,\quad x^2+x+k-4=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$D/4=1-4(k-4)>0 \text{ から，} k<\frac{17}{4}$$

(2)　P, Q の $x$ 座標をそれぞれ $p,\ q$ とすると，$p,\ q$ は①の異なる実数解となる。

$$p+q=-1,\quad pq=k-4\cdots\cdots\cdots②$$

△OPQ の面積を $S$ とすると，

$$S=\frac{1}{2}k|p-q|=\frac{1}{2}k\sqrt{(p+q)^2-4pq}=\frac{1}{2}k\sqrt{1-4(k-4)}=\frac{1}{2}\sqrt{-4k^3+17k^2}$$

ここで，$f(k)=-4k^3+17k^2$ とおくと，

$f'(k)=-12k^2+34k=-2k(6k-17)$

| $k$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{17}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{17}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(k)$ | 0 | ＋ | 0 | － | |
| $f(k)$ | | ↗ | | ↘ | |

よって，$k=\frac{17}{6}$ のとき $f(k)$ は最大，すなわち $S$ は最大となる。

最大値は，$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{17}{6}\sqrt{17-4\cdot\frac{17}{6}}=\frac{17}{36}\sqrt{51}$

### ［解 説］

センター試験レベルの基本的な問題です。確実に取っておきたい一題です。

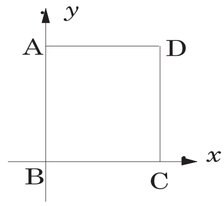
**2**

問題のページへ

(1)　A→B→A の確率は$(1-p)^2$, A→D→A の確率は$p^2$より,

$$a_2=(1-p)^2+p^2=2p^2-2p+1$$

A→D→C の確率は$p(1-p)$, A→B→C の確率は$(1-p)p$より,




$$c_2=p(1-p)+(1-p)p=-2p^2+2p$$

また, C→B→A または C→D→A の確率は合わせて$c_2=-2p^2+2p$, C→B→C または C→D→C の確率は合わせて$a_2=2p^2-2p+1$

ここで, 2 秒後に点 Q が A または C にいることに注意して

$$a_4=a_2\cdot a_2+c_2\cdot c_2=(2p^2-2p+1)^2+(-2p^2+2p)^2$$
$$=8p^4-16p^3+12p^2-4p+1$$
$$c_4=c_2\cdot a_2+a_2\cdot c_2=2(2p^2-2p+1)(-2p^2+2p)$$
$$=-8p^4+16p^3-12p^2+4p$$

(2)　(1)と同様に考えて,

$$a_{2(n+1)}=a_2\cdot a_{2n}+c_2\cdot c_{2n}\ \cdots\cdots\cdots①$$
$$c_{2(n+1)}=c_2\cdot a_{2n}+a_2\cdot c_{2n}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①＋②より，$a_{2(n+1)}+c_{2(n+1)}=(a_2+c_2)(a_{2n}+c_{2n})=a_{2n}+c_{2n}$

よって，$a_{2n}+c_{2n}=a_2+c_2=1\ \cdots\cdots\cdots③$

①－②より，$a_{2(n+1)}-c_{2(n+1)}=(a_2-c_2)(a_{2n}-c_{2n})=(4p^2-4p+1)(a_{2n}-c_{2n})$

よって，$a_{2n}-c_{2n}=(a_2-c_2)(4p^2-4p+1)^{n-1}=(4p^2-4p+1)^n\ \cdots\cdots\cdots④$

③＋④より，$2a_{2n}=1+(4p^2-4p+1)^n$

$$a_{2n}=\frac{1}{2}\left\{1+(4p^2-4p+1)^n\right\}=\frac{1}{2}\left\{1+(2p-1)^{2n}\right\}$$

［解 説］

(2)の連立漸化式は対称型なので，両辺の和と差を考えるという常套手段で結論が導けます。なお，偶数秒後に点 Q は A または C にいることに注目すれば，全確率の和が 1 という③を明らかとして扱っても構いません。

$\boxed{3a}$

問題のページへ

(1)　$n$ を整数として，

(i) $z \neq 1$ $(\theta \neq 360° \times n)$ のとき

$$S_1 = 1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{1 - 1}{1 - z} = 0$$

(ii)　$z = 1$ $(\theta = 360° \times n)$ のとき

$$S_1 = 1 + 1 + 1 + \cdots\cdots + 1 = N$$

(2)　ド・モアブルの定理から，$z^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$ となり，$S_1$ の実部が $S_2$ となる。

(i) $z \neq 1$ $(\theta \neq 360° \times n)$ のとき

$$S_2 = 0$$

(ii)　$z = 1$ $(\theta = 360° \times n)$ のとき

$$S_2 = N$$

［解 説］

3b との選択問題ですが，新課程の本問を選んだ方が有利です。5 分程度で答案が書けるのではないでしょうか。

**3b**

問題のページへ

(1)　$E+2A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2a&0\\2b&2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a&0\\2b&1+2a\end{pmatrix}$

$a\neq-\dfrac{1}{2}$ より $\det(E+2A_1)=(1+2a)^2>0$ なので，$(E+2A_1)^{-1}$ が存在する。

$$A_2=-A_1(E+2A_1)^{-1}=-\begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix}\frac{1}{(1+2a)^2}\begin{pmatrix}1+2a&0\\-2b&1+2a\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{(1+2a)^2}\begin{pmatrix}a(1+2a)&0\\b&a(1+2a)\end{pmatrix}$$

(2)　$E+2A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\dfrac{2}{(1+2a)^2}\begin{pmatrix}a(1+2a)&0\\b&a(1+2a)\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{(1+2a)^2}\begin{pmatrix}1+2a&0\\-2b&1+2a\end{pmatrix}$$

$\det(E+2A_2)=\dfrac{1}{(1+2a)^2}>0$ なので，$(E+2A_2)^{-1}$ が存在する。

$$A_3=-A_2(E+2A_2)^{-1}$$

$$=\frac{1}{(1+2a)^2}\begin{pmatrix}a(1+2a)&0\\b&a(1+2a)\end{pmatrix}(1+2a)^2\frac{1}{(1+2a)^2}\begin{pmatrix}1+2a&0\\2b&1+2a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(1+2a)^2}\begin{pmatrix}a(1+2a)^2&0\\b(1+2a)^2&a(1+2a)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix}=A_1$$

以上より，帰納的に

$n$ が奇数のとき，$A_n=A_1=\begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix}$

$n$ が偶数のとき，$A_n=A_2=-\dfrac{1}{(1+2a)^2}\begin{pmatrix}a(1+2a)&0\\b&a(1+2a)\end{pmatrix}$

## [解 説]

難易としては 3a と同じくらい基本的ですが，行列の計算が題材となっているために，計算量がかなり多めです。(1)で $A_2$ を求めているので，(2)は推測→帰納法という流れかとも思ったのですが，$A_3=A_1$ となったために結論は簡単なものでした。この程度では数学的帰納法による証明は不要でしょう。