1

解答解説のページへ

曲線 $y=\log x$ $(x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$ $(a>1)$ での接線を l とし, P から x 軸へおろした垂線の足を H とする。さらに, 接線 l と x 軸, および曲線 $y=\log x$ で囲まれた図形の面積を S_1, 曲線と x 軸, および線分 PH で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1) S_1, S_2 を求めよ。

(2) $a\to\infty$ のときの $\dfrac{S_1}{S_2\cdot\mathrm{PH}}$ の極限を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上に 4 点 A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする。さらに，点 Q は，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする。最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき，n 秒後に頂点 A, C にいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする。a_n，c_n を求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上に放物線$y = x^2$と直線$l : y = k$を考える。

(1)　放物線上の点$(a,\ a^2)$での法線と直線lとの交点をPとし，そのx座標をbとする。bをaとkで表せ。

(2)　直線l上の点$\mathrm{P}(b,\ k)$を放物線の異なる3法線が通るようなbの範囲を求めよ。

4a

解答解説のページへ

N を自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ をみたすとして，以下の級数和 S_1，S_2，S_3 の値を求めよ。ただし，ここで i は虚数単位（$i^2=-1$）である。

(1)　$S_1=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{N-1}$

(2)　$S_2=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3)　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots\cdots+\cos^2(N-1)\theta$

$\boxed{\text{4b}}$

解答解説のページへ

平面上に楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ と直線 $l: y=x+k$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　この楕円と直線 l が 2 つの共有点をもつために k がみたすべき条件を求めよ。

(2)　k は(1)の条件をみたすとし，さらに $k \neq 0$ とする。(1)における 2 つの共有点を P, Q とし, O を原点とするとき，三角形 OPQ の面積を最大にする k の値，およびそのときの面積を求めよ。

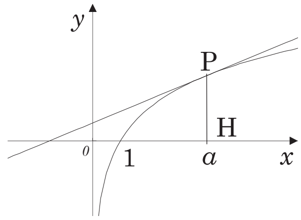
$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$y=\log x$, $y'=\dfrac{1}{x}$ より, $l: y=\dfrac{1}{a}(x-a)+\log a=\dfrac{1}{a}x-1+\log a$ ………①

l と x 軸との交点は①より,

$$0=\frac{1}{a}x-1+\log a,\quad x=a(1-\log a)$$



すると, 右図より,

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\{a-a(1-\log a)\}\log a$$

$$=\frac{1}{2}a(\log a)^2$$

$$S_2=\int_1^a \log x\,dx=\left[x\log x-x\right]_1^a=a\log a-a+1$$

よって, $S_1=\dfrac{1}{2}a(\log a)^2-S_2=\dfrac{1}{2}a(\log a)^2-a\log a+a-1$

(2)　$$\frac{S_1}{S_2\cdot \mathrm{PH}}=\frac{\frac{1}{2}a(\log a)^2-a\log a+a-1}{(a\log a-a+1)\log a}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\log a}+\frac{1}{(\log a)^2}-\frac{1}{a(\log a)^2}}{1-\frac{1}{\log a}+\frac{1}{a\log a}}$$

$$\to\frac{1}{2}\quad(a\to\infty)$$

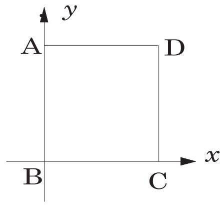
［解　説］

(1)は基本的な積分計算, (2)は特別な工夫が要求されない極限計算です。完答しなくてはいけない問題です。

2

問題のページへ

n 秒後に B, D にいる確率をそれぞれ b_n，d_n とすると，$a_0=1$，$b_0=c_0=d_0=0$ で，また $a_1=c_1=0$，$b_1=1-p$，$d_1=p$ となる。



$$a_{n+1}=(1-p)b_n+pd_n\cdots\cdots\cdots①$$
$$b_{n+1}=(1-p)a_n+pc_n\cdots\cdots\cdots②$$
$$c_{n+1}=pb_n+(1-p)d_n\cdots\cdots\cdots③$$
$$d_{n+1}=pa_n+(1-p)c_n\cdots\cdots\cdots④$$

①＋③より，$a_{n+1}+c_{n+1}=b_n+d_n\cdots\cdots\cdots⑤$

①－③より，$a_{n+1}-c_{n+1}=(1-2p)(b_n-d_n)\cdots\cdots\cdots⑤'$

②＋④より，$b_{n+1}+d_{n+1}=a_n+c_n\cdots\cdots\cdots⑥$

②－④より，$b_{n+1}-d_{n+1}=(1-2p)(a_n-c_n)\cdots\cdots\cdots⑥'$

⑤と⑥より，$a_{n+2}+c_{n+2}=a_n+c_n\cdots\cdots\cdots⑦$

⑤′と⑥′より，$a_{n+2}-c_{n+2}=(1-2p)^2(a_n-c_n)\cdots\cdots\cdots⑧$

(i)　n が偶数のとき

⑦より，$a_n+c_n=a_0+c_0=1$

⑧より，$a_n-c_n=(a_0-c_0)(1-2p)^{2\cdot\frac{n}{2}}=(1-2p)^n$

よって，$a_n=\dfrac{1}{2}\left\{1+(1-2p)^n\right\}$，$c_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-(1-2p)^n\right\}$

(ii)　n が奇数のとき

⑦より，$a_n+c_n=a_1+c_1=0$

⑧より，$a_n-c_n=(a_1-c_1)(1-2p)^{2\cdot\frac{n-1}{2}}=0$

よって，$a_n=c_n=0$

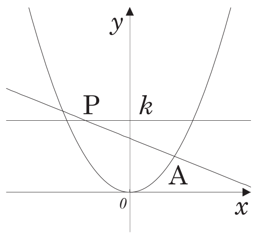
［解　説］

ていねいに漸化式を立てて解いてみましたが，n が奇数のときは $a_n=c_n=0$ であることは題意から明らかです。そのため n が偶数のときだけを考えればよいということになり，そのような解でも構いません。文系の第 2 問を参照してください。

3

問題のページへ

(1)　$y = x^2$，$y' = 2x$ から，点 $A(a,\ a^2)$ における接線の方向ベクトルの成分は $(1,\ 2a)$ とおくことができ，これが法線の法線ベクトルとなることより，法線の方程式は，



$$x - a + 2a(y - a^2) = 0$$

$$x + 2ay - a - 2a^3 = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

①が点 $P(b,\ k)$ を通ることより，

$$b + 2ak - a - 2a^3 = 0,\ \ b = 2a^3 - (2k-1)a \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　放物線においては，1 本の法線に対して 1 個の接点が対応するので，異なる 3 本の法線が存在する条件は，②を a に関する方程式とみたとき，②が異なる 3 実数解をもつことと同値である。

②の右辺を $f(a)$ とおくと，$f'(a) = 6a^2 - (2k-1)$

(i)　$2k - 1 \leqq 0\ \left(k \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$f'(a) \geqq 0$ より $f(a)$ は単調増加するので，②が 3 実数解をもつことはない。

(ii)　$2k - 1 > 0\ \left(k > \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$f'(a) = 6\left(a + \sqrt{\frac{2k-1}{6}}\right)\left(a - \sqrt{\frac{2k-1}{6}}\right)$$

となり，ここで $\alpha = \sqrt{\dfrac{2k-1}{6}}$ とおくと，

a	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(a)$	↗		↘		↗

②が異なる 3 実数解をもつ条件は，$f(\alpha) < b < f(-\alpha)$

$$f(\alpha) = \alpha(2\alpha^2 - 2k + 1) = \sqrt{\frac{2k-1}{6}} \cdot \frac{2-4k}{3} = -\frac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)}$$

$$f(-\alpha) = -\alpha(2\alpha^2 - 2k + 1) = -\sqrt{\frac{2k-1}{6}} \cdot \frac{2-4k}{3} = \frac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)}$$

よって，$-\dfrac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)} < b < \dfrac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)}$

(i)(ii)より，$k > \dfrac{1}{2}$ のもとで $-\dfrac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)} < b < \dfrac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)}$

[解　説]

(2)の冒頭のコメントは，一般的には「法線の本数≦接点の個数」という関係があるからです。本問では，法線の法線ベクトルの成分が $(1,\ 2a)$ となることから，「法線の本数＝接点の個数」であることがわかります。

4a

問題のページへ

(1)　n を整数として，

(i)　$z \neq 1$ $(\theta \neq 360° \times n)$ のとき

$$S_1 = 1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{1-1}{1-z} = 0$$

(ii)　$z = 1$ $(\theta = 360° \times n)$ のとき

$$S_1 = 1 + 1 + 1 + \cdots\cdots + 1 = N$$

(2)　ド・モアブルの定理から，$z^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$ となり，S_1 の実部が S_2 となる。

(i)　$z \neq 1$ $(\theta \neq 360° \times n)$ のとき

$$S_2 = 0$$

(ii)　$z = 1$ $(\theta = 360° \times n)$ のとき

$$S_2 = N$$

(3)　
$$\begin{aligned} S_3 &= 1 + \cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cdots\cdots + \cos^2(N-1)\theta \\ &= 1 + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} + \cdots\cdots + \frac{1 + \cos 2(N-1)\theta}{2} \\ &= \frac{N}{2} + \frac{1}{2}\{1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots\cdots + \cos 2(N-1)\theta\} \end{aligned}$$

ここで，$S_3{}' = 1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots\cdots + \cos 2(N-1)\theta$ とすると，

$S_4 = 1 + z^2 + z^4 + \cdots\cdots + z^{2(N-1)}$ の実部が $S_3{}'$ となる。

(i)　$z \neq \pm 1$ $(\theta \neq 180° \times n)$ のとき

$$S_4 = \frac{1 - z^{2N}}{1 - z^2} = 0 \text{ より，} S_3 = \frac{N}{2}$$

(ii)　$z = \pm 1$ $(\theta = 180° \times n)$ のとき

$$S_4 = N \text{ より，} S_3 = \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N$$

［解　説］

(3)の解法も，(1)(2)の流れから考えると，自然に上の解のようになると思われます。(1)の誘導がなくても，S_2，S_3 はこの解法で求めるというのが受験生の常識となるでしょう。

$\boxed{4b}$

問題のページへ

(1)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ………①，$y=x+k$ ………②

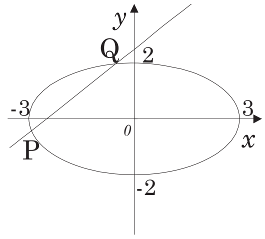
②を①に代入して，$4x^2+9(x+k)^2=36$

$13x^2+18kx+9k^2-36=0$ ………③

①と②が 2 つの共有点をもつ条件は，③が異なる 2 実数解をもつことより，

$D/4=9^2k^2-13\cdot 9(k^2-4)>0$

$k^2-13<0$ より，$-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$



(2)　P, Q の x 座標をそれぞれ $x=p$，q とおくと, p, q は③の実数解より，

$p+q=-\dfrac{18}{13}k$，$pq=\dfrac{9k^2-36}{13}$ ………④

$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\,|\,p-q\,|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(p+q)^2-4pq}$ から，④を代入して，

$\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{13}\sqrt{18^2k^2-4\cdot 13(9k^2-36)}=\dfrac{12\sqrt{2}}{13}\sqrt{-k^2+13}$

また, O から PQ に下ろした垂線の足を H とおくと，$\mathrm{OH}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$ となる。

$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とすると，$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{OH}$ から，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{|k|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{12\sqrt{2}}{13}\sqrt{-k^2+13}=\frac{6}{13}\sqrt{-k^4+13k^2}$$

$$=\frac{6}{13}\sqrt{-\left(k^2-\frac{13}{2}\right)^2+\frac{13^2}{2^2}}$$

以上より，$k^2=\dfrac{13}{2}$ すなわち $k=\pm\sqrt{\dfrac{13}{2}}$ のとき, S は最大値 $\dfrac{6}{13}\cdot\dfrac{13}{2}=3$ をとる。

［解　説］

普通に計算をしていっても上記程度の量で，さほど複雑でもありません。4a と 4b を比較すると，難易的には同程度で，4b の方がやや計算量が多いくらいです。なお，選択問題に確率が出なかったのは 87 年以来，久々のことです。