$\boxed{1}$

解答解説のページへ

曲線$C : y = x|x-1|$と，直線$l : y = kx$に関して，以下の問いに答えよ。

(1)　Cとlが$x>0$で2つの交点をもつようなkの範囲を求めよ。

(2)　kが(1)で求めた範囲を動くとき，Cとlによって囲まれる図形全体の面積を最小にするkの値を求めよ。

2

解答解説のページへ

A と B がゲームをくり返す。それぞれの最初の持ち点は 2 で，ゲームごとに勝者は敗者から 1 点をもらい，どちらか一方の持ち点が 0 になるまで続ける。ただし，各ゲームにおいて，A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を $1-p$ とする。

(1) ちょうど 4 回目のゲームでどちらか一方の持ち点が 0 になる確率を求めよ。

(2) $2n$ 回目までのゲームで，A の持ち点が 0 になる確率を求めよ。

$\boxed{\text{3a}}$

解答解説のページへ

複素数 $z\,(z \neq -1)$ に対し，$f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(f(z)) = z+1$ を満たす z を求めよ。

(2)　複素数平面上で 3 点 0，α，$f(f(\alpha))$ が正三角形をなすとき，複素数 α を求めよ。

$\boxed{\text{3b}}$ 解答解説のページへ

(1)　ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ が次の条件(＊)を満たすとき，点 $(a_1,\ a_2)$ の存在範囲を図示せよ。

(＊)　あるベクトル $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ が存在して，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$ が任意のベクトル $\vec{p}$ に対して成り立つ。

(2)　(1)で求めた $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ に対して，条件(＊)にあるベクトル $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ を求めよ。

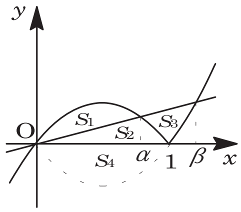
1

問題のページへ

(1)　$y=x|x-1|$………①，$y=kx$………②

①より, $x<1$ で $y=-x(x-1)$………③，また $x\geqq 1$ で $y=x(x-1)$………④

③より $y'=-2x+1$ なので，$x=0$ における微分係数は，$y'=1$ となる。



右図より，①と②が $x>0$ で 2 つの交点をもつ条件は，$0<k<1$ となる。

(2)　②と③の $x\neq 0$ の交点 $x=\alpha$ は，$-x(x-1)=kx$ より $x=\alpha=1-k$

②と④の $x\neq 0$ の交点 $x=\beta$ は，$x(x-1)=kx$ より $x=\beta=1+k$

C と l によって囲まれる面積を S, 上図の各領域の面積を S_1，S_2，S_3，S_4 とおくと，$S_3=S_1+(S_2+S_3+S_4)-2S_4$ より，

$$\begin{aligned}S&=S_1+\{S_1+(S_2+S_3+S_4)-2S_4\}\\&=2S_1+(S_2+S_3+S_4)-2S_4\\&=2\int_0^{\alpha}-x(x-\alpha)\,dx+\int_0^{\beta}-x(x-\beta)\,dx-2\int_0^{1}-x(x-1)\,dx\\&=\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{6}\beta^3-\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{3}(1-k)^3+\frac{1}{6}(1+k)^3-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

すると，$S'=-(1-k)^2+\dfrac{1}{2}(1+k)^2$

$$=-\frac{1}{2}(k^2-6k+1)$$

k	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
S'		−	0	＋	
S		↘		↗	

右表より，$k=3-2\sqrt{2}$ のとき, S は最小となる。

［解 説］

毎年, 見かける超有名パズルです。パズルとして解かず，普通に積分計算をしても S は求まりますが，ミスの頻度はかなり高くなるでしょう。なお，昨年は山形大で出ています。

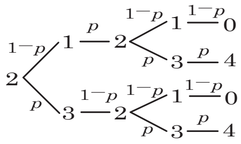
2

問題のページへ

(1)　A の勝つ確率は p, 負ける確率は $1-p$ である。

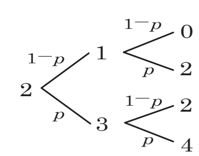
ここで，ちょうど 4 回目でゲームが終了するのは，4 回目に A の持ち点が 0 または 4 になったときである。

A の持ち点の変化は右図のようになるので，求める確率は，



$$2(1-p)^3p+2p^3(1-p)$$
$$=2p(1-p)\left\{(1-p)^2+p^2\right\}$$
$$=2p(1-p)(1-2p+2p^2)$$

(2)　$2n$ 回目のゲームで，A の持ち点が 0，2，4 になる確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおくと，



$$b_n=\left\{(1-p)p+p(1-p)\right\}b_{n-1}=2p(1-p)b_{n-1}$$

ここで，$b_0=1$ より，

$$b_n=b_0\left\{2p(1-p)\right\}^n=\left\{2p(1-p)\right\}^n$$

すると，$n\geqq 1$ で，

$$a_n=(1-p)^2b_{n-1}=(1-p)^2\left\{2p(1-p)\right\}^{n-1}$$

求める $2n$ 回目までのゲームで A の持ち点が 0 になる確率は，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=(1-p)^2\sum_{k=1}^{n}\left\{2p(1-p)\right\}^{k-1}=\frac{(1-p)^2}{1-2p+2p^2}\left[1-\left\{2p(1-p)\right\}^n\right]$$

[解 説]

状態の遷移の様子を図として表し，それに従って確率計算をしていけばよい問題です。本問も頻出題の一つです。

3a

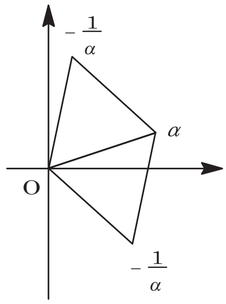
問題のページへ

(1) $f(f(z))=f\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=\dfrac{\dfrac{z-1}{z+1}-1}{\dfrac{z-1}{z+1}+1}=\dfrac{z-1-(z+1)}{z-1+(z+1)}=-\dfrac{1}{z}$

条件より，$-\dfrac{1}{z}=z+1$，$z^2+z+1=0$

よって，$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) 3 点 0，α，$f(f(\alpha))$ が正三角形をなすとき，点 $f(f(\alpha))$ すなわち $-\dfrac{1}{\alpha}$ は，点 α を原点まわりに $\pm 60°$ 回転した点である。



$$-\frac{1}{\alpha}=\left(\cos(\pm 60°)+i\sin(\pm 60°)\right)\alpha$$

$$\alpha^2=\frac{-1}{\cos(\pm 60°)+i\sin(\pm 60°)}$$

$$=\frac{\cos 180°+i\sin 180°}{\cos(\pm 60°)+i\sin(\pm 60°)}$$

よって，$\alpha^2=\cos 120°+i\sin 120°$ または $\alpha^2=\cos 240°+i\sin 240°$

$|\alpha^2|=1$ より $|\alpha|^2=1$ となり，$|\alpha|=1$

これより，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$　$(0°\leqq\theta<360°)$ とおくことができるので,

$$\alpha^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

よって，$2\theta=120°，240°，360°+120°，360°+240°$

$\theta=60°，120°，240°，300°$

以上より，$\alpha=\cos 60°+i\sin 60°=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\alpha=\cos 120°+i\sin 120°=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，

$\alpha=\cos 240°+i\sin 240°=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\alpha=\cos 300°+i\sin 300°=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

［解 説］

異なる 3 点 0，α，β が正三角形をなす場合の有名条件 $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$ を先に求めておいて，この後 $\beta=-\dfrac{1}{\alpha}$ を代入するという解法も考えられます。なお，計算量は同程度です。

$\boxed{3b}$ 問題のページへ

(1) x, y を任意の実数として，$\vec{p} = (x,\ y)$ とおく。

条件より，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2 + (\vec{b}\cdot\vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$ なので，

$$(a_1x + a_2y)^2 + (b_1x + b_2y)^2 = x^2 + y^2 \cdots\cdots\cdots①$$

$(x,\ y) = (1,\ 0)$ に対して①が成立することより，$a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2} = 1 \cdots\cdots\cdots②$

$(x,\ y) = (0,\ 1)$ に対して①が成立することより，$a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2} = 1 \cdots\cdots\cdots③$

$(x,\ y) = (1,\ 1)$ に対して①が成立することより，$(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 2$

②③を代入して，$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \cdots\cdots\cdots④$

逆に②③④が成立するとき，任意の実数 x, y に対して，①は明らかに成立する。

よって，求める条件は，ある $(b_1,\ b_2)$ に対して，②③④が成立する条件となる。

まず，②より $a_1 = \cos\theta$，$b_1 = \sin\theta$，③より $a_2 = \cos\varphi$，$b_2 = \sin\varphi$ とおくことができる。

④に代入して，$\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = 0$，$\cos(\theta - \varphi) = 0$

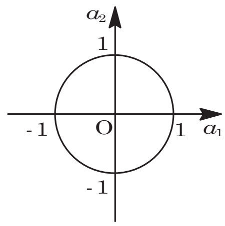
すると $\theta - \varphi = \pm 90^\circ$ より，$\varphi = \theta \mp 90^\circ$ となる。

以下，複号同順で，

$$a_1 = \cos\theta,\ a_2 = \cos(\theta \mp 90^\circ) = \pm\sin\theta \cdots\cdots\cdots⑤$$

θ は任意より，$a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} = 1$

以上より，点 $(a_1,\ a_2)$ は原点中心の単位円周上に存在し，図示すると右図のようになる。



(2) (1)より，$b_1 = \sin\theta$，$b_2 = \sin(\theta \mp 90^\circ) = \mp\cos\theta$

⑤より，$b_1 = \pm a_2$，$b_2 = \mp a_1$

よって，$\vec{b} = (a_2,\ -a_1)$ または $\vec{b} = (-a_2,\ a_1)$

[解 説]

かなり丁寧に解を書きました。任意の x, y に対し，①が成立する必要十分条件については，もっとあっさり書いても構わないと思います。