1

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$OA=OB=OC=3$，$AB=BC=CA=\sqrt{6}$ である。また，点 P は辺 AB を $x:1-x$ に内分し，点 Q は辺 OC を $y:1-y$ に内分する($0<x<1$，$0<y<1$)。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，x, y で表せ。

(3) 2 点 P, Q の間の距離 PQ の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ。

$\boxed{2}$　　解答解説のページへ

次の条件(ア)～(ウ)を満たす数列$\{p_n\}$について考える。

(ア)　$p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n \leqq \cdots$ である。

(イ)　p_1，p_2，$\cdots$，p_n，$\cdots$はどれも自然数である。

(ウ)　p_1，p_2，$\cdots$，p_n，$\cdots$の中にはすべての自然数 k が現れ，その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)～(ウ)を満たし，すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots,\ \overbrace{k,\ k,\ \cdots,\ k}^{k\text{個}},\ \cdots$$

を$\{a_n\}$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　項数 5 の数列で，数列$\{p_n\}$の初めの 5 項となり得るものをすべて挙げよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の第 210 項 a_{210} の値を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

行列$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & d\end{pmatrix}$は，ある実数$k$に対して等式$A^2=kA$を満たす。このとき，次の問いに答えよ。ただし，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$とする。

(1) kとdの値を求めよ。

(2) 実数bとcが等式 $(E+bA)(E+2A)=E+cA$を満たすとき，cをbで表せ。

(3) 数列$\{a_n\}$が任意の自然数 n に対して等式 $(E+2A)^n=E+a_nA$を満たすとき，a_nをnで表せ。

4

解答解説のページへ

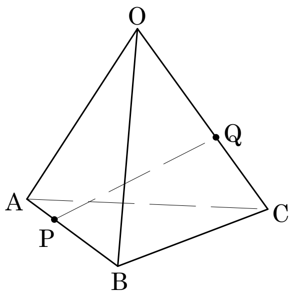
$F(x)=\int_0^x \sqrt{1+e^{2t}}\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$\sqrt{1+e^{2t}}=u$ とおいて，$F(x)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{F(x)-e^x\}$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　条件より，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{6}$ なので，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=6$

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=6$$

すると，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$ から，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$

(2)　AP : PB $=x:1-x$，OQ : QC $=y:1-y$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=y\vec{c}-\{x\vec{b}+(1-x)\vec{a}\}=(x-1)\vec{a}-x\vec{b}+y\vec{c}$$

(3)　条件より $|\vec{c}|=3$，(1)と同様にすると，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=6$

となり，これらの条件を(2)の結果に適用して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=9(x-1)^2+9x^2+9y^2-12x(x-1)-12xy+12y(x-1)$$

$$=6x^2+9y^2-6x-12y+9$$

$$=6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+9\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{7}{2}$$

よって，$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{2}{3}$ のとき, PQ は最小値 $\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$ をとる。

［解　説］

空間ベクトルの基本問題ですので，計算ミスは厳禁です。

2

問題のページへ

(1)　条件より，数列$\{p_n\}$の各項は，$p_1 \leqq p_2 \leqq p_3 \leqq p_4 \leqq p_5$を満たす自然数，さらにすべての自然数が現れ，1 の個数は 1 以上 3 以下，2 の個数は 2 以上 4 以下，3 の個数は 3 以上 5 以下，……である。

すると，この条件を満たす$(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5)$は，

$(1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2)$，$(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2)$，$(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$，

$(1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3)$

(2)　数列$\{a_n\}$を下のように群に分ける。

$1\,|\,2,\ 2\,|\,3,\ 3,\ 3\,|\cdots|\,k,\ k,\ \cdots,\ k\,|\cdots$

すると，第n群の末項までの項数は，$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

ここで，$210=\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 21$から，$a_{210}$は第 20 群の末項となり，$a_{210}=20$である。

(3)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{50}p_i$が最小の値をとるのは，$50=3+4+5+6+7+8+9+8$より，数列$\{p_n\}$は，$p_1$から順に，1 が 3 個，2 が 4 個，3 が 5 個，4 が 6 個，5 が 7 個，6 が 8 個，7 が 9 個，そして 8 が 8 個並んだものである。すると，その和は，

$$\sum_{i=1}^{50}p_i=\sum_{k=1}^{7}k(k+2)+8\times 8=\sum_{k=1}^{7}(k^2+2k)+64$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 7\cdot 8\cdot 15+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8+64=260$$

［解 説］

題意が把握しにくい問題です。上の解は，設定された 2 つの数列の関係を考えることなく，単に解いただけです。

3

問題のページへ

(1) 行列$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & d\end{pmatrix}$に対して，ハミルトン・ケーリーの定理から，

$$A^2-(1+d)A+(d+6)E=O$$

条件より，$A^2=kA$を代入すると，$kA-(1+d)A+(d+6)E=O$

$$(k-1-d)A+(d+6)E=O$$

行列Aは行列Eの実数倍ではないので，$k-1-d=d+6=0$となり，

$$d=-6,\ k=-5$$

(2) 条件より，$(E+bA)(E+2A)=E+cA$から，

$$E+(b+2)A+2bA^2=E+cA$$

(1)から，$A^2=-5A$なので，$E+(b+2)A-10bA=E+cA$

$$(-9b+2-c)A=O$$

$A\neq O$なので，$-9b+2-c=0$，すなわち$c=-9b+2$である。

(3) $(E+2A)^n=E+a_nA$から，(2)の結果を利用すると，

$$E+a_{n+1}A=(E+2A)^{n+1}=(E+a_nA)(E+2A)=E+(-9a_n+2)A$$

$A\neq O$より，$a_{n+1}=-9a_n+2$となり，

$$a_{n+1}-\frac{1}{5}=-9\left(a_n-\frac{1}{5}\right)$$

これより，$a_n-\frac{1}{5}=\left(a_1-\frac{1}{5}\right)(-9)^{n-1}$となり，$a_1=2$を代入すると，

$$a_n=\frac{1}{5}+\frac{9}{5}(-9)^{n-1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}(-9)^n$$

［解 説］

行列のn乗についての頻出問題です。(2)が(3)へのうまい誘導になっています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) $\sqrt{1+e^{2t}}=u$ とおくと，$1+e^{2t}=u^2$ から，$e^{2t}=u^2-1$

すると，$2e^{2t}dt=2udu$，$dt=\dfrac{u}{u^2-1}du$ となり，$\sqrt{1+e^{2x}}=y$ とおくと，

$$F(x)=\int_0^x\sqrt{1+e^{2t}}\,dt=\int_{\sqrt{2}}^{y}u\cdot\frac{u}{u^2-1}du=\int_{\sqrt{2}}^{y}\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du$$
$$=\Big[\,u\,\Big]_{\sqrt{2}}^{y}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{y}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=y-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\Big[\,\log\Big|\frac{u-1}{u+1}\Big|\,\Big]_{\sqrt{2}}^{y}$$
$$=y-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\frac{y-1}{y+1}-\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$
$$=y-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\frac{(y-1)^2}{y^2-1}-\frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}$$
$$=\sqrt{1+e^{2x}}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{1+e^{2x}}-1)^2}{e^{2x}}-\log(\sqrt{2}-1)$$
$$=\sqrt{1+e^{2x}}-\sqrt{2}+\log(\sqrt{1+e^{2x}}-1)-\log e^x-\log(\sqrt{2}-1)$$
$$=\sqrt{1+e^{2x}}+\log(\sqrt{1+e^{2x}}-1)-x-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}-1)$$

(2) $F(x)-e^x=\sqrt{1+e^{2x}}-e^x+\log(\sqrt{1+e^{2x}}-1)-\log e^x-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}-1)$

$$=\frac{(1+e^{2x})-e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}+e^x}+\log\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{e^x}-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}-1)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}+e^x}+\log\left(\sqrt{\frac{1}{e^{2x}}+1}-\frac{1}{e^x}\right)-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}-1)$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{F(x)-e^x\}=-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}-1)$

［解 説］

定積分の計算問題です。置換が与えられているので，慎重な計算がすべてです。