1

解答解説のページへ

数直線上の動点 A がはじめ原点にある。動点 A は 1 秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きにそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で指定された長さを移動するものとする。n 秒後に動点 A が原点に戻る確率を p_n とする。ただし，n は自然数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき，p_1，p_2 を求めよ。

(2) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき，p_n を求めよ。

(3) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 3 または負の向きに 1 移動するとき，p_n を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$\triangle$OAB において，OA $=1$，OB $=$ AB $=2$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　$\angle$AOB の二等分線上の点 P が AP $=$ BP を満たすとき，線分 AP の長さを求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(t)=\begin{cases} t & (0\leqq t\leqq \pi) \\ 2\pi - t & (\pi < t \leqq 2\pi) \end{cases}$ に対して，次のように 2 つの関数 $g(x)$，$h(x)$ を $0\leqq x\leqq 2\pi$ で定義する。

$$g(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t+x)\,dt,\quad h(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t+x)\,dt$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$，$h(x)$ を求めよ。

(2) x が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，関数 $y=g(x)+h(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

実数 a, b, c に対して, 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ が整数であるならば, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ。

(2)　$f(2010)$, $f(2011)$, $f(2012)$ が整数であるならば, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　動点 A は, 1 秒後には点 1 または点 -1 に移動しているので，$p_1 = 0$ である。

また, 2 秒後に動点 A が原点に戻るのは，正の向きに 1 移動が 1 回，負の向きに 1 移動が 1 回より，その確率は，$p_2 = {}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ である。

(2)　n 秒後に動点 A が原点に戻るのは，正の向きに 1 移動が $\dfrac{n}{2}$ 回，負の向きに 1 移動が $\dfrac{n}{2}$ 回である。すると, n を偶奇に分けて,

(i)　n が偶数のとき　$p_n = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(ii)　n が奇数のとき　$p_n = 0$

(3)　n 秒後に動点 A が原点に戻るのに，正の向きに 3 移動が k 回，負の向きに 1 移動が $n-k$ 回とすると,

$$3k-(n-k)=0,\ \ k=\frac{n}{4}$$

すると, n が 4 の倍数かどうかで場合分けをして,

(i)　n が 4 の倍数のとき　$p_n = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{4}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

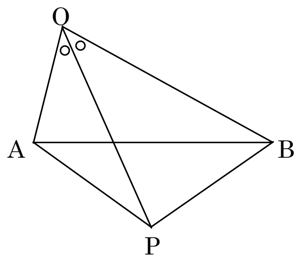
(ii)　n が 4 の倍数でないとき　$p_n = 0$

［解 説］

ランダムウォークを題材にした確率の基本問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=2$ から，余弦定理より，

$$2^2=1^2+2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$

(2)　$\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=1:2$ より，AB と OP の交点は辺 AB を $1:2$ に内分することより，k を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(2\vec{a}+\vec{b})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(2k-1)\vec{a}+k\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=2k\vec{a}+(k-1)\vec{b}$

ここで，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(2k-1)^2+k(2k-1)+4k^2=10k^2-5k+1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=4k^2+2k(k-1)+4(k-1)^2=10k^2-10k+4$$

条件より，$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ なので，$10k^2-5k+1=10k^2-10k+4$ となり，$k=\dfrac{3}{5}$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=10\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-5\cdot\dfrac{3}{5}+1=\dfrac{8}{5}$ から，$\mathrm{AP}=\sqrt{\dfrac{8}{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{10}$

［解 説］

平面ベクトルに関するセンターレベルの計算問題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) $g(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t+x)\,dt=\int_0^{\pi} t\cos(t+x)\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)\cos(t+x)\,dt$

ここで，$2\pi-t=s$ とおくと，$-dt=ds$ となり，

$$\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)\cos(t+x)\,dt=\int_{\pi}^{0} s\cos(2\pi-s+x)(-ds)$$

$$=\int_0^{\pi} s\cos(-s+x)\,ds=\int_0^{\pi} s\cos(s-x)\,ds$$

よって，$g(x)=\int_0^{\pi} t\cos(t+x)\,dt+\int_0^{\pi} t\cos(t-x)\,dt=2\cos x\int_0^{\pi} t\cos t\,dt$

$$=2\cos x\left\{\left[t\sin t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin t\,dt\right\}=-4\cos x$$

$h(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t+x)\,dt=\int_0^{\pi} t\sin(t+x)\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)\sin(t+x)\,dt$

同様に，$2\pi-t=s$ とおくと，$-dt=ds$ となり，

$$\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)\sin(t+x)\,dt=\int_{\pi}^{0} s\sin(2\pi-s+x)(-ds)$$

$$=\int_0^{\pi} s\sin(-s+x)\,ds=-\int_0^{\pi} s\sin(s-x)\,ds$$

よって，$h(x)=\int_0^{\pi} t\sin(t+x)\,dt-\int_0^{\pi} t\sin(t-x)\,dt=2\sin x\int_0^{\pi} t\cos t\,dt$

$$=2\sin x\left\{\left[t\sin t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin t\,dt\right\}=-4\sin x$$

(2) (1)より，$y=g(x)+h(x)=-4\cos x-4\sin x=-4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

すると，$0\leqq x\leqq 2\pi$ から，$x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi\ \left(x=\frac{5}{4}\pi\right)$のとき最大値 $4\sqrt{2}$ をとる。また，$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\ \left(x=\frac{\pi}{4}\right)$のとき最小値 $-4\sqrt{2}$ をとる。

［解 説］

置換積分をしていますが，この工夫は必須というわけではありません。普通に部分積分を実行すれば，さほど複雑な計算はなく，$g(x)$ と $h(x)$ は求まります。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，条件より，$f(0)=c$ は整数である。

また，条件より，$f(1)=1+a+b+c$，$f(-1)=-1+a-b+c$ がともに整数なので，k と l を整数として，

$$a+b=k\cdots\cdots\cdots①,\ a-b=l\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a=\dfrac{k+l}{2}$，$b=\dfrac{k-l}{2}$ となり，

$$f(x)=x^3+\frac{k+l}{2}x^2+\frac{k-l}{2}x+c=x^3+\frac{k}{2}x(x+1)+\frac{l}{2}x(x-1)+c$$

これより，整数 n に対して，$f(n)=n^3+\dfrac{k}{2}n(n+1)+\dfrac{l}{2}n(n-1)+c$ と表すことができ，$n(n+1)$，$n(n-1)$ はともに連続する 2 整数の積となり，偶数である。

よって，すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数である。

(2)　まず，$g(x)=f(x+2011)$ とおくと，

$$g(x)=(x+2011)^3+a(x+2011)^2+b(x+2011)+c$$

これより，$g(x)$ は x^3 の係数が 1 の 3 次関数となり，

$$g(-1)=f(2010),\ g(0)=f(2011),\ g(1)=f(2012)$$

すると，条件より，$g(-1)$，$g(0)$，$g(1)$ が整数なので，(1)から，すべての整数 n に対して，$g(n)$ は整数である。

ここで，$x+2011=t$ とおくと，$f(t)=g(t-2011)$ となる。

したがって，すべての整数 n に対して，$g(n-2011)$ も整数となることから，$f(n)=g(n-2011)$ は整数である。

［解 説］

(1)は有名問題です。次数下げという方法もありますが，上の解答例では，連立方程式の処理で証明しています。(2)は(1)の利用がポイントです。