1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) $k,\ n$ は不等式 $k \leqq n$ を満たす自然数とする。このとき,

$$2^{k-1}n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1) \leqq n^k k!$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

(3) $\dfrac{9}{19} < \log_{10} 3 < \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

a を実数とし，xy 平面上において，2 つの放物線

$$C : y = x^2\,,\ \ D : x = y^2 + a$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) $p,\,q$ を実数として，直線 $l : y = px + q$ が C に接するとき，q を p で表せ。

(2) (1)において，直線 l がさらに D にも接するとき，a を p で表せ。

(3) C と D の両方に接する直線の本数を，a の値によって場合分けして求めよ。

3

解答解説のページへ

箱の中に 1 から 9 までの異なる整数が 1 つずつ書かれたカードが 9 枚入っている。「箱からカードを 1 枚引き，カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を 3 回繰り返す。記録された 3 つの整数の最小値を m，最大値を M とする。次の問いに答えよ。

(1) $5<m$ となる確率および $M<5$ となる確率を求めよ。

(2) $m\leqq 5\leqq M$ となる確率を求めよ。

(3) $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$ に対して，$m\leqq k\leqq M$ となる確率を $p(k)$ とする。$p(k)$ の最大値，最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　実数 $x \geqq 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x-\frac{1}{2}x^2 \leqq \log(1+x) \leqq x$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = n^2\int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x)\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(3)　数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　自然数 $k,\ n$　$(k\leqq n)$ に対して，$2^{k-1}=1\cdot 2\cdot 2\cdots\cdots 2\leqq 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots k=k!$

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)\leqq n\cdot n\cdot n\cdots\cdots n=n^k$$

よって，$2^{k-1}n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)\leqq n^k k!$

(2)　(1)より，${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}\leqq\dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ となり，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n}+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\leqq 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n^n}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3$$

(3)　(2)より，$n\log_{10}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\log_{10}3$ となり，$n=9$ を代入すると，

$$9\log_{10}\frac{10}{9}<\log_{10}3,\ 9(1-2\log_{10}3)<\log_{10}3,\ \frac{9}{19}<\log_{10}3\cdots\cdots\cdots①$$

また，$3^2<10$ より，$2\log_{10}3<1$ となり，$\log_{10}3<\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$\dfrac{9}{19}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$

［解　説］

(1)の結果を(2)に，(2)の結果を(3)に適用する不等式の証明問題です。なお，(1)は数学的帰納法を利用するほどでもありません。

2

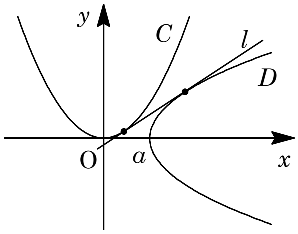
問題のページへ

(1)　$C: y=x^2$ ……①，$l: y=px+q$ ……②を連立すると，

$$x^2=px+q,\ x^2-px-q=0$$

C と l が接することより，$p^2+4q=0$，$q=-\dfrac{p^2}{4}$ ………③

(2)　③を②に代入すると，$l: y=px-\dfrac{p^2}{4}$ ………④



ここで，④と $D: x=y^2+a$ を連立して，

$$y=p(y^2+a)-\frac{p^2}{4},\ py^2-y+pa-\frac{p^2}{4}=0$$

$p=0$ のとき，④より $l: y=0$ となるが，このとき D と l は接しない。

$p\neq 0$ のとき，D と l が接する条件は，$1-4p\left(pa-\dfrac{p^2}{4}\right)=0$ より，

$$1-4p^2a+p^3=0,\ a=\frac{1}{4p^2}(p^3+1)=\frac{1}{4}\left(p+\frac{1}{p^2}\right)\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(3)　$f(p)=\dfrac{1}{4}\left(p+\dfrac{1}{p^2}\right)$ とおくと，⑤は $f(p)=a$ となり，この方程式の異なる実数解の個数が，C と D の両方に接する直線 l の本数に一致する。

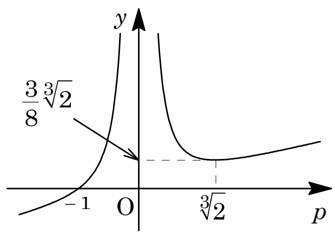
$$f'(p)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{p^3}\right)=\frac{p^3-2}{4p^3}$$

p	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{2}$	$\cdots$
$f'(p)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(p)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$	$\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$

すると，$f(p)$ の増減は右表のようになり，

$$\lim_{p\to-\infty}f(p)=-\infty,\ \lim_{p\to\infty}f(p)=\infty$$
$$\lim_{p\to-0}f(p)=\lim_{p\to+0}f(p)=\infty$$

これより，$y=f(p)$ のグラフは右図のようになる。



したがって，C と D の両方に接する直線の本数は，$y=f(p)$ と $y=a$ の共有点の個数となり，$a<\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{2}$ のとき 1 本，$a=\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{2}$ のとき 2 本，$a>\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{2}$ のとき 3 本である。

［解　説］

共通接線の本数についての典型的な問題です。

3

問題のページへ

(1)　記録された 3 つの整数の最小値を m, 最大値を M とする。

まず，$5<m$ となるのは，6, 7, 8, 9 のカードのいずれかのみ記録される場合より，その確率は，$\left(\dfrac{4}{9}\right)^3=\dfrac{64}{729}$ である。

また，$M<5$ となるのは，1, 2, 3, 4 のカードのいずれかのみ記録される場合より，その確率は，$\left(\dfrac{4}{9}\right)^3=\dfrac{64}{729}$ である。

(2)　(1)より，$5<m$ となる事象と $M<5$ となる事象は排反である。

すると，$m\leqq 5\leqq M$ となる事象は，これらの事象の余事象であることを考えると，その確率は，$1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^3-\left(\dfrac{4}{9}\right)^3=\dfrac{601}{729}$ である。

(3)　(2)と同様にして，$m\leqq k\leqq M$ となる確率を $p(k)$ は，

$$
\begin{aligned}
p(k)&=1-\left(\frac{k-1}{9}\right)^3-\left(\frac{9-k}{9}\right)^3=1-\frac{1}{729}\left\{(k-1)^3+(9-k)^3\right\}\\
&=1-\frac{1}{729}(k-1+9-k)\left\{(k-1)^2-(k-1)(9-k)+(9-k)^2\right\}\\
&=1-\frac{8}{729}(3k^2-30k+91)=1-\frac{8}{729}\left\{3(k-5)^2+16\right\}
\end{aligned}
$$

よって，$p(k)$ の最大値は $p(5)=\dfrac{601}{729}$，最小値は $p(1)=p(9)=\dfrac{217}{729}$ である。

［解　説］

確率の基本的な問題です。題意が把握できれば，ややこしい箇所はありません。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ に対して，$f(x)=\log(1+x)-x$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}\leqq 0$$

よって，$f(x)\leqq f(0)=0$ から，$\log(1+x)\leqq x$ ………①

$x\geqq 0$ に対して，$g(x)=\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}\geqq 0$$

よって，$g(x)\geqq g(0)=0$ から，$\log(1+x)\geqq x-\frac{1}{2}x^2$ ………②

①②より，$x-\frac{1}{2}x^2\leqq\log(1+x)\leqq x$

(2)　(1)より，$\int_0^{\frac{1}{n}}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx\leqq\int_0^{\frac{1}{n}}\log(1+x)\,dx\leqq\int_0^{\frac{1}{n}}x\,dx$ となり，

$$n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx\leqq a_n\leqq n^2\int_0^{\frac{1}{n}}x\,dx$$

ここで，$n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=n^2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6n}$，$n^2\int_0^{\frac{1}{n}}x\,dx=\frac{1}{2}$ より，

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6n}\leqq a_n\leqq\frac{1}{2}$$

すると，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6n}\right)=\frac{1}{2}$ から，$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

(3)　(1)より，$\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4}\leqq\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqq\frac{k}{n^2}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2},\quad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4}\right)\leqq b_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

ここで，$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4}\right)=\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$，$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$ より，

$$\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\leqq b_n\leqq\frac{n+1}{2n}$$

すると，$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\right\}=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ から，$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$

［解　説］

はさみうちを利用した極限の問題です。ただ，(3)は出題の意図に反した解答例かもしれません。