$\boxed{1}$

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P は，点 B，C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$CPQ の面積 S を，x を用いて表せ。

(2) 面積 S の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(3) 線分 AQ の長さ L の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を実数とし，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする。行列 $A=\begin{pmatrix}a & -4\\ -\dfrac{3a}{4} & 2\end{pmatrix}$ は $A^3=-a^2E$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$ を求めよ。

(3)　$A+A^2+A^3+\cdots+A^{2011}+A^{2012}+A^{2013}$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上の 2 つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$はそれぞれの大きさが 1 であり，また平行でないとする。次の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ であるような実数 t に対して，不等式 $0 < |\vec{a}+t\vec{b}|^2 \leqq (1+t)^2$ が成立することを示せ。

(2) $t \geqq 0$ であるような実数 t に対して $\vec{p} = \dfrac{2t^2\vec{b}}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}$ とおき，$f(t) = |\vec{p}|$ とする。このとき，不等式 $f(t) \geqq \dfrac{2t^2}{(1+t)^2}$ が成立することを示せ。

(3) $f(t) = 1$ となる正の実数 t が存在することを示せ。

4

解答解説のページへ

微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 $x,\ y$ に対して

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$$

を満たし，さらに $f'(0)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

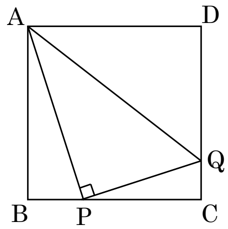
(1)　$f(0)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\mathrm{BP}=x$，$\angle\mathrm{QPC}=\angle\mathrm{PAB}$ から $\tan\angle\mathrm{QPC}=x$ となり，

$$\mathrm{CQ}=(1-x)\tan\angle\mathrm{QPC}=x(1-x)$$

すると，$\triangle\mathrm{CPQ}$ の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}(1-x)\cdot x(1-x)=\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{1}{2}x$$

(2)　$S'=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(3x-1)(x-1)$

これより, S の増減は右表のようになり，$x=\frac{1}{3}$ のとき S は最大値 $\frac{2}{27}$ をとる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	0
S		↗	$\frac{2}{27}$	↘	

(3)　まず，$\mathrm{DQ}=1-x(1-x)=x^2-x+1$

すると，$L=\mathrm{AQ}$ に対して,

$$L^2=1+(x^2-x+1)^2$$

ここで，$f(x)=1+(x^2-x+1)^2$ とおくと,

$$f'(x)=2(x^2-x+1)(2x-1)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{25}{16}$	↗	

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=\frac{1}{2}$ のとき $f(x)$ は最小値 $\frac{25}{16}$ をとる。このとき，L は最小となり，最小値は $\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$ である。

［解 説］

微分の応用問題です。勢いをつけるためというのが，存在理由でしょうか。

2

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix} a & -4 \\ -\dfrac{3a}{4} & 2 \end{pmatrix}$に対して，ハミルトン・ケーリーの定理を適用すると，

$$A^2-(a+2)A+(2a-3a)E=O,\ \ A^2=(a+2)A+aE\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$A^3=(a+2)A^2+aA=(a+2)\{(a+2)A+aE\}+aA$

条件より，$A^3=-a^2E\ \cdots\cdots②$を代入すると，

$$(a+2)^2A+a(a+2)E+aA=-a^2E,\ \ (a^2+5a+4)A+(2a^2+2a)E=O$$

AはEの定数倍ではないので，$a^2+5a+4=2a^2+2a=0$

よって，$a=-1$である。

(2)　(1)より，①は$A^2=A-E$，②は$A^3=-E$となり，

$$\begin{aligned} A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6 &= A+A^2-E+A(-E)+A^2(-E)+(-E)^2 \\ &= A+A^2-E-A-A^2+E=O \end{aligned}$$

(3)　$2013=6\times335+3$なので，$S=A+A^2+A^3+\cdots+A^{2011}+A^{2012}+A^{2013}$とおくと，(2)から，

$$S=A^{2011}+A^{2012}+A^{2013}=A+A^2+A^3=A+(A-E)-E=2(A-E)$$

すると，$A=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \dfrac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}$より，$S=2\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ \dfrac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ \dfrac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

［解　説］

行列のn乗に関する基本問題です。(2)の誘導があるので, (3)の方針は立てやすいでしょう。

3

問題のページへ

(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$は$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$で，平行でないことより，なす角θは$0<\theta<\pi$であり，

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+t^2|\vec{b}|^2=1+2t\cos\theta+t^2\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$t\geqq 0$から，$1+2t\cos\theta+t^2\geqq 1-2t+t^2=(1-t)^2\geqq 0$

ただし，左側の不等式は$t=0$のときのみ等号が成り立ち，右側の不等式は$t=1$のときのみ等号が成り立つ。これより，$1+2t\cos\theta+t^2>0\cdots\cdots$②である。

また，$1+2t\cos\theta+t^2\leqq 1+2t+t^2=(1+t)^2\cdots\cdots\cdots$③

①②③より，$0<|\vec{a}+t\vec{b}|^2\leqq(1+t)^2$

(2)　(1)より，$\dfrac{1}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}\geqq\dfrac{1}{(1+t)^2}$であり，$t\geqq 0$から，

$$f(t)=|\vec{p}|=\frac{2t^2|\vec{b}|}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}=\frac{2t^2}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}\geqq\frac{2t^2}{(1+t)^2}$$

(3)　$g(t)=\dfrac{2t^2}{(1+t)^2}$とおくと，$g'(t)=\dfrac{4t(1+t)^2-2t^2\cdot 2(1+t)}{(1+t)^4}=\dfrac{4t}{(1+t)^3}$

これより，$t\geqq 0$で$g'(t)\geqq 0$なので，$g(t)$は単調に増加する。

すると，$f(t)$は$t\geqq 0$で連続であり，$f(0)=0$かつ$f(3)\geqq g(3)=\dfrac{9}{8}$から，$f(t)=1$となる実数$t$が$0<t<3$に存在する。

［解　説］

問題設定に大掛かりな装いがありますが，内容としては中間値の定理だけです。なお，(3)では$g(3)$を考えましたが，$\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=2$に注目しても同様です。

4

問題のページへ

(1) 条件より，$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y\cdots\cdots\cdots$①

①に $y=0$ を代入すると，$f(x)f(0)-f(x)=0$ となり，

$$f(x)\{f(0)-1\}=0$$

ここで，$f(0)\neq 1$ とすると，任意の x に対して $f(x)=0$ となり①は成立しない。

よって，$f(0)=1$ である。

(2) 関数 $f(x)$ は微分可能なので，①の両辺を y で微分すると，

$$f(x)f'(y)-f'(x+y)\cdot 1=\sin x\cos y\cdots\cdots\cdots②$$

②に $y=0$ を代入すると，$f(x)f'(0)-f'(x)=\sin x$

$f'(0)=0$ から，$f'(x)=-\sin x$

(3) (2)から，C を定数として，$f(x)=\cos x+C$ となり，(1)より，

$$f(0)=1+C=1,\ C=0$$

よって，$f(x)=\cos x$ であり，$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ とおくと，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\cos x\,dx=\frac{1}{2}\Big[\log\Big|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\log(2+\sqrt{3})$$

［解　説］

関数方程式の頻出タイプの問題です。(2)は微分係数や導関数の定義を利用しても構いませんが，問題文に「$f(x)$ は微分可能」と書かれていますので，直接，①の両辺を微分しています。