1　　解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし，線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とする。また，直線 OC 上の点 R を $\overrightarrow{\mathrm{QR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RC}}$ の大きさの比 $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|:|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|$ を求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{OQR}$ の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とする。行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ a & -3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ は $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ を満たすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a, b, c の値を求めよ。

(2) A は逆行列をもつことを示し，A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ。

(4) 自然数 n に対して，$(A+6A^{-1})^n$ を求めよ。

$\boxed{3}$　　解答解説のページへ

関数 $f(x)=(-4x^2+2)e^{-x^2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　a を $a \geqq 0$ となる実数とし，$I(a)=\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ とする。このとき，定積分 $\int_0^a x^2 e^{-x^2}\,dx$ を a，$I(a)$ を用いて表せ。

(3)　曲線 $y=f(x)$，x 軸，y 軸および直線 $x=5$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

自然数 n に対して，$a_n=\int_0^1 \frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，不等式 $\left|\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right| \leqq \frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

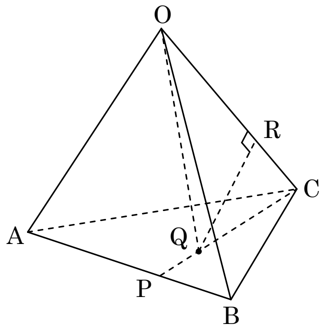
(2)　定積分 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(3)　自然数 n に対して，$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4)　極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし，線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とすることより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$$

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1\ ,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

から，

$$|\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|^2=1^2+4\cdot1^2+1^2+4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=11$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\dfrac{1}{4}|\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|=\dfrac{\sqrt{11}}{4}$

(2)　k を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\vec{c}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=k\vec{c}-\frac{1}{4}(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{4}\{-\vec{a}-2\vec{b}+(4k-1)\vec{c}\}$$

$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\vec{c}=0$ となり，$-\dfrac{1}{2}-2\cdot\dfrac{1}{2}+(4k-1)\cdot1^2=0$

すると，$k=\dfrac{5}{8}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|:|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|=k:1-k=5:3$ となる。

(3)　(2)より，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\dfrac{5}{8}|\vec{c}|=\dfrac{5}{8}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2}=\sqrt{\dfrac{11}{16}-\dfrac{25}{64}}=\dfrac{\sqrt{19}}{8}$

ここで，△OQR の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{\sqrt{19}}{8}=\frac{5}{128}\sqrt{19}$$

［解　説］

正四面体を題材にした頻出パターンの問題です。計算量も少なめです。

2

問題のページへ

(1) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&b\\0&c\end{pmatrix}$から$AP=P\begin{pmatrix}3&b\\0&c\end{pmatrix}$より，$\begin{pmatrix}2&1\\a&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\2&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&b\\0&c\end{pmatrix}$

$$4+2=6,\ 2-6=2b+c,\ 2a-6=6,\ a+18=2b-6c$$

よって，$a=6$，$b=0$，$c=-4$となる。

(2) (1)から，$A=\begin{pmatrix}2&1\\6&-3\end{pmatrix}$となり，$\det A=2\cdot(-3)-1\cdot6=-12\neq0$から，

$$A^{-1}=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}-3&-1\\-6&2\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3&1\\6&-2\end{pmatrix}$$

(3) (1)より，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0\\0&-4\end{pmatrix}$となり，両辺を$n$乗すると，

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&(-4)^n\end{pmatrix},\ P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&(-4)^n\end{pmatrix}$$

すると，$P^{-1}=\frac{1}{-14}\begin{pmatrix}-6&-1\\-2&2\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}6&1\\2&-2\end{pmatrix}$から，

$$A^n=P\begin{pmatrix}3^n&0\\0&(-4)^n\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2&1\\2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&0\\0&(-4)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&1\\2&-2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\cdot3^n+(-4)^n&3^n-(-4)^n\\6\cdot3^n-6(-4)^n&3^n+6(-4)^n\end{pmatrix}$$

(4) $B=A+6A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\6&-3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&1\\6&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7&3\\18&-8\end{pmatrix}$となり，$E$を単位として，

$$B^2+\frac{1}{2}B-\frac{55}{2}E=O,\ 2B^2+B-55E=O,\ (2B+11E)(B-5E)=O$$

さて，x^nを$(2x+11)(x-5)$で割ったときの商を$Q(x)$，余りを$ax+b$とすると，

$$x^n=(2x+11)(x-5)Q(x)+ax+b\cdots\cdots\cdots①$$

①に$x=-\frac{11}{2}$，5を代入すると，$\left(-\frac{11}{2}\right)^n=-\frac{11}{2}a+b\cdots\cdots②$，$5^n=5a+b\cdots\cdots③$

②③より，$a=\frac{2}{21}\left\{5^n-\left(-\frac{11}{2}\right)^n\right\}$，$b=\frac{1}{21}\left\{11\cdot5^n+10\left(-\frac{11}{2}\right)^n\right\}$となり，①から，

$$B^n=(2B+11E)(B-5E)Q(B)+aB+bE=aB+bE$$
$$=\frac{1}{21}\left\{5^n-\left(-\frac{11}{2}\right)^n\right\}\begin{pmatrix}7&3\\18&-8\end{pmatrix}+\frac{1}{21}\left\{11\cdot5^n+10\left(-\frac{11}{2}\right)^n\right\}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{7\cdot2^n}\begin{pmatrix}6\cdot10^n+(-11)^n&10^n-(-11)^n\\6\cdot10^n-6(-11)^n&10^n+6(-11)^n\end{pmatrix}$$

［解　説］

(3)までは頻出ですが, (4)への繋がりは見つけられませんでした。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=(-4x^2+2)e^{-x^2}$ に対し，$f(-x)=f(x)$ より，以下 $x\geqq 0$ で考える。

$$f'(x)=-8xe^{-x^2}-2x(-4x^2+2)e^{-x^2}$$
$$=4x(2x^2-3)e^{-x^2}$$

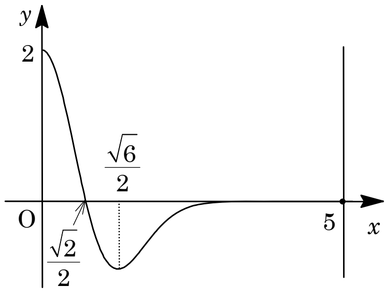
x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	$-4e^{-\frac{3}{2}}$	↗

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，対称性に着目すると，$x=0$ のとき極大値 2, $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき極小値 $-4e^{-\frac{3}{2}}$ をとる。

(2)　$I(a)=\displaystyle\int_0^a e^{-x^2}dx$ とするとき，$J(a)=\displaystyle\int_0^a x^2e^{-x^2}dx$ は,

$$J(a)=\int_0^a -\frac{x}{2}e^{-x^2}\cdot(-2x)dx=\Big[-\frac{x}{2}e^{-x^2}\Big]_0^a+\int_0^a\frac{1}{2}e^{-x^2}dx$$
$$=-\frac{a}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}I(a)$$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=(-4x^2+2)e^{-x^2}=0$ より，曲線 $y=f(x)$ の概形は右図のようになり，$y=f(x)$，x 軸, y 軸および直線 $x=5$ で囲まれる 2 つの部分の面積の和 S は,



$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)dx-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^5 f(x)dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)dx-\int_0^5 f(x)dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-4x^2+2)e^{-x^2}dx-\int_0^5(-4x^2+2)e^{-x^2}dx$$
$$=-8J\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)+4I\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)+4J(5)-2I(5)$$
$$=-8\Big\{-\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}I\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big\}+4I\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)+4\Big\{-\frac{5}{2}e^{-25}+\frac{1}{2}I(5)\Big\}-2I(5)$$
$$=2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}-10e^{-25}$$

［解　説］

(2)の誘導が，(3)の計算にうまく効いています。もっとも仕掛けのある問題ですが。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$a_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とするとき，

$$\left|\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|=\left|\int_0^1 \frac{-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx\right|=\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において，$\dfrac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\leqq x^{2(n+1)}$ より，

$$\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx\leqq\int_0^1 x^{2(n+1)}dx=\frac{1}{2n+3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\leqq\dfrac{1}{2n+3}\ \cdots\cdots\cdots③$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=[\,x\,]_0^1-\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=1-\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

とおくと，$x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$から，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，

$$I=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=1-\frac{\pi}{4}$$

(3)　$\dfrac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}=\dfrac{x^2\{1-(-x^2)^n\}}{1-(-x^2)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^2\cdot(-x^2)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k}$ から，

$$a_n=\int_0^1\{x^2-x^4+x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n}\}dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$$

(4)　(3)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=\lim_{n\to\infty}a_n\ \cdots\cdots\cdots④$

また，③より，$n\to\infty$のとき，$\dfrac{1}{2n+3}\to 0$ から$\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx=1-\frac{\pi}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

したがって，④⑤より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=1-\frac{\pi}{4}$

［解 説］

定積分と級数についての標準的な問題です。細かな誘導のため，方針に迷うことはありません。