1

解答解説のページへ

整数 a に対して $P(x)=x^3-ax^2+ax-1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ。

(2)　3 次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。

(3)　3 次方程式 $P(x)=0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

△ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\ 4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ が成り立つことを示せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3) △ABC の重心を G とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$f(x)=x^2-2x+2$ とする。放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を l_1 とし，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{Q}(p+1,\ f(p+1))$ における接線を l_2 とする。2 直線 l_1，l_2 の交点を R とする。ただし p は定数である。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l_1，l_2 の方程式をそれぞれ p を用いて表せ。

(2) 交点 R の座標を p を用いて表せ。

(3) 放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を次の条件(i)および(ii)を満たすように定める。

(i)　$a_1=0$，$a_2=3$

(ii)　3 以上の自然数 n に対して，第$(n-1)$項a_{n-1}の値が初項a_1から第$(n-2)$項a_{n-2}までのどの項の値とも等しくないときは$a_n=a_{n-1}-1$であり，第$(n-1)$項a_{n-1}の値が初項a_1から第$(n-2)$項a_{n-2}までのどれかの項の値と等しいときは$a_n=a_{n-1}+6$である。

次の問いに答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の第 50 項の値を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の初項から第 50 項までの和を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$P(x)=x^3-ax^2+ax-1$ を $x-1$ で割ると,

$$P(x)=(x-1)\{x^2-(a-1)x+1\}$$

これより, 求める商は $x^2-(a-1)x+1$ である。

(2)　3 次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつ条件は, $x^2-(a-1)x+1=0$ が虚数解をもつことより, 判別式を D として,

$$D=(a-1)^2-4<0,\ (a-1+2)(a-1-2)<0,\ (a+1)(a-3)<0$$

これより, $-1<a<3$ となり, 求める整数 a の値は $a=0,\ 1,\ 2$ である。

(3)　3 次方程式 $P(x)=0$ のすべての解が整数となる条件は, $x^2-(a-1)x+1=0$ の 2 つの解が整数であることより, この解 α , β を整数として,

$$\alpha+\beta=a-1\cdots\cdots\cdots①,\ \alpha\beta=1\cdots\cdots\cdots②$$

②より, $(\alpha,\ \beta)=(1,\ 1)$, $(-1,\ -1)$ となり,

(i)　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 1)$ のとき　①から, $a=(1+1)+1=3$

(ii)　$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ -1)$ のとき　①から, $a=(-1-1)+1=-1$

(i)(ii)より, 求める整数 a の値は $a=-1,\ 3$ である。

［解 説］

3 次方程式を題材にした基本事項の確認問題です。

2

問題のページへ

(1)　$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ より，$\vec{a}\cdot(4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c})=0$ となり，

$$4|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5$ から，$100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ ………①

(2)　(1)と同様にして，$\vec{b}\cdot(4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c})=0$ から，$4\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2+5\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$$75+4\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \text{ ………②}$$

また，$\vec{c}\cdot(4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c})=0$ から，$4\vec{c}\cdot\vec{a}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+5|\vec{c}|^2=0$

$$125+4\vec{c}\cdot\vec{a}+3\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \text{ ………③}$$

①③より，$-75+4\vec{a}\cdot\vec{b}-5\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ となり，②と合わせて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

すると，②より $\vec{b}\cdot\vec{c}=-15$，①より $\vec{c}\cdot\vec{a}=-20$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ なので，(2)から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{1}{9}(25+25+25+0-30-40)=\frac{5}{9}$$

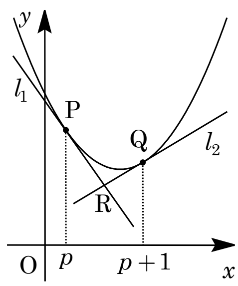
よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\frac{\sqrt{5}}{3}$ である。

［解 説］

平面ベクトルの基本問題です。(2)は(1)を誘導とする方法で解きました。

3

問題のページへ



(1)　$f(x)=x^2-2x+2$ に対して，$f'(x)=2x-2$ となり，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 l_1 の方程式は，

$$y-(p^2-2p+2)=(2p-2)(x-p)$$

$$y=(2p-2)x-p^2+2\cdots\cdots\cdots①$$

点 $\mathrm{Q}(p+1,\ f(p+1))$ における接線 l_2 の方程式は，①より，

$$y=\{2(p+1)-2\}x-(p+1)^2+2$$

$$y=2px-p^2-2p+1\cdots\cdots\cdots②$$

(2)　①②を連立して，$(2p-2)x-p^2+2=2px-p^2-2p+1$ より，

$$-2x=-2p-1,\quad x=\frac{2p+1}{2}$$

②から，$y=2p\cdot\dfrac{2p+1}{2}-p^2-2p+1=p^2-p+1$

よって，l_1，l_2 の交点 R の座標は，$\mathrm{R}\Big(\dfrac{2p+1}{2},\ p^2-p+1\Big)$ となる。

(3)　放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_p^{\frac{2p+1}{2}}\{x^2-2x+2-(2p-2)x+p^2-2\}dx$$

$$+\int_{\frac{2p+1}{2}}^{p+1}(x^2-2x+2-2px+p^2+2p-1)dx$$

$$=\int_p^{\frac{2p+1}{2}}(x-p)^2dx+\int_{\frac{2p+1}{2}}^{p+1}(x-p-1)^2dx$$

$$=\Big[\frac{(x-p)^3}{3}\Big]_p^{\frac{2p+1}{2}}+\Big[\frac{(x-p-1)^3}{3}\Big]_{\frac{2p+1}{2}}^{p+1}=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^3-\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^3=\frac{1}{12}$$

［解　説］

有名な構図の定積分と面積についての頻出問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) 条件より，$a_1=0$，$a_2=3$，$a_3=3-1=2$，$a_4=2-1=1$，$a_5=1-1=0$，$a_6=0+6=6$，$a_7=6-1=5$，$a_8=5-1=4$，$a_9=4-1=3$，$a_{10}=3+6=9$

(2) (1)の結果から，$a_1=0$で，kを自然数とし，以下のように推測できる。

$$a_{4k-2}=3k,\ a_{4k-1}=3k-1,\ a_{4k}=3k-2,\ a_{4k+1}=3k-3\cdots\cdots\cdots(*)$$

推測(＊)が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $k=1$のとき　(1)より，成立している。

(ii) $k\leqq l$のとき　(＊)が成立していると仮定する。

このとき，$a_1=0$から$a_{4l+1}=3l-3$までの値は，$3l$以下であり，しかもa_{4l+1}は$a_{4l-6}=a_{4(l-1)-2}=3(l-1)$と等しいので，

$$a_{4l+2}=3l-3+6=3l+3,\ a_{4(l+1)-2}=3(l+1)$$
$$a_{4l+3}=3l+3-1=3l+2,\ a_{4(l+1)-1}=3(l+1)-1$$
$$a_{4l+4}=3l+2-1=3l+1,\ a_{4(l+1)}=3(l+1)-2$$
$$a_{4l+5}=3l+1-1=3l,\ a_{4(l+1)+1}=3(l+1)-3$$

よって，$k=l+1$のときも成立している。

(i)(ii)より，すべての自然数kに対して(＊)は成立している。

すると，$50=4\times13-2$なので，$a_{50}=a_{4\times13-2}=3\times13=39$である。

(3) 初項から第50項までの和をS_{50}とおくと，

$$\begin{aligned}S_{50}&=a_1+\sum_{k=1}^{12}(a_{4k-2}+a_{4k-1}+a_{4k}+a_{4k+1})+a_{50}\\&=0+\sum_{k=1}^{12}(3k+3k-1+3k-2+3k-3)+39=\sum_{k=1}^{12}(12k-6)+39\\&=6\sum_{k=1}^{12}(2k-1)+39=6\cdot\frac{1+23}{2}\cdot12+39=864+39=903\end{aligned}$$

［解 説］

群数列の絡んだ漸化式の問題です。a_1を特別扱いして，a_2から4項ずつのグループで考えていくところが複雑です。