

1

解答解説のページへ

整数 a に対して $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ。
- (2) 3 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。
- (3) 3 次方程式 $P(x) = 0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

$\triangle ABC$ の外心を O , 重心を G とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし,
 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 5$, $4\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = 12\overrightarrow{OG}$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $4\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ を示せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$ および $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ。
- (3) $|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周 C 上の点を $A(a, b)$ とし、 $f(x) = (x-a)^2 + b$ とする。点 $B(0, -2)$ から放物線 $y = f(x)$ に引いた接線を l_1, l_2 とし、接点をそれぞれ $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ とする。ただし、 $p < q$ である。放物線 $y = f(x)$ と 2 直線 l_1, l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

- (1) 接線 l_1 の方程式と接点 P の座標、および接線 l_2 の方程式と接点 Q の座標を a, b を用いて表せ。
- (2) 面積 S を b を用いて表せ。
- (3) 点 A が円周 C 上を動くとき、面積 S の最大値とそのときの点 A の座標 (a, b) を求めよ。

4

解答解説のページへ

数列 $\{a_n\}$ を次の条件(i)および(ii)を満たすように定める。

(i) $a_1 = 0, a_2 = 3$

(ii) 3 以上の自然数 n に対して、第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n = a_{n-1} - 1$ であり、第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n = a_{n-1} + 6$ である。

次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の第 2015 項の値を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 201 項までの和を求めよ。

5

解答解説のページへ

自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad (n \text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x) = 1 - \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば、 $0 < x \leq 1$ のとき $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$ が成り

立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。 $-\frac{x^4}{4!} \leq f_1(x) - \cos x \leq \frac{x^4}{4!}$

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき、次の不等式 $-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \leq f_{2m-1}(x) - \cos x \leq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ がすべて

の自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$ を $x - 1$ で割ると,

$$P(x) = (x-1)\{x^2 - (a-1)x + 1\}$$

これより、求める商は $x^2 - (a-1)x + 1$ である。

(2) 3 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつ条件は、 $x^2 - (a-1)x + 1 = 0$ が虚数解をもつことより、判別式を D として、

$$D = (a-1)^2 - 4 < 0, (a-1+2)(a-1-2) < 0, (a+1)(a-3) < 0$$

これより、 $-1 < a < 3$ となり、求める整数 a の値は $a = 0, 1, 2$ である。

(3) 3 次方程式 $P(x) = 0$ のすべての解が整数となる条件は、 $x^2 - (a-1)x + 1 = 0$ の 2 つの解が整数であることより、この解 α, β を整数として、

$$\alpha + \beta = a - 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \alpha\beta = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②より、 $(\alpha, \beta) = (1, 1), (-1, -1)$ となり、

(i) $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ のとき ①から、 $a = (1+1) + 1 = 3$

(ii) $(\alpha, \beta) = (-1, -1)$ のとき ①から、 $a = (-1-1) + 1 = -1$

(i)(ii)より、求める整数 a の値は $a = -1, 3$ である。

[解説]

3 次方程式を題材にした基本事項の確認問題です。

2

問題のページへ

(1) $\triangle ABC$ の重心 G に対して $\overrightarrow{OG} = \vec{g}$ とおくと, $4\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = 12\overrightarrow{OG}$ から,

$$4(\vec{g} - \vec{a}) + 3(\vec{g} - \vec{b}) + 5(\vec{g} - \vec{c}) = 12\vec{g}$$

よって, $4\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ となる。

(2) (1)から, $4\vec{a} + 3\vec{b} = -5\vec{c}$ となり, $|4\vec{a} + 3\vec{b}| = |5\vec{c}|$ から,

$$16|\vec{a}|^2 + 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 25|\vec{c}|^2$$

すると, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 5$ より, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{24}(25 - 16 - 9) \cdot 5^2 = 0$

同様にして, $3\vec{b} + 5\vec{c} = -4\vec{a}$ より, $9|\vec{b}|^2 + 30\vec{b} \cdot \vec{c} + 25|\vec{c}|^2 = 16|\vec{a}|^2$ となり,

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{30}(16 - 9 - 25) \cdot 5^2 = -15$$

また, $4\vec{a} + 5\vec{c} = -3\vec{b}$ より, $16|\vec{a}|^2 + 40\vec{c} \cdot \vec{a} + 25|\vec{c}|^2 = 9|\vec{b}|^2$ となり,

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{40}(9 - 16 - 25) \cdot 5^2 = -20$$

(3) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ なので, (2)から,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OG}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{1}{9}(25 + 25 + 25 + 0 - 30 - 40) = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

よって, $|\overrightarrow{OG}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$ である。

[解説]

数分程度で片付く平面ベクトルの基本問題です。

3

問題のページへ

(1) まず、点 $(0, -2)$ を通る直線を $y = mx - 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ とおく。 $f(x) = (x-a)^2 + b$ のとき、放物線 $y = f(x) \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ を連立すると、 $(x-a)^2 + b = mx - 2$ から、

$$x^2 - (2a+m)x + a^2 + b + 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ が接することより、

$$D = (2a+m)^2 - 4(a^2 + b + 2) = 0$$

すると、 $2a+m = \pm 2\sqrt{a^2 + b + 2}$ となり、

$$m = 2(-a \pm \sqrt{a^2 + b + 2})$$

接点の x 座標は、 $\textcircled{3}$ より、 $x = \frac{2a+m}{2} = \pm\sqrt{a^2 + b + 2}$ (複号同順)これより、 $p = -\sqrt{a^2 + b + 2}$ 、 $q = \sqrt{a^2 + b + 2}$ となり、

$$l_1: y = 2(-a - \sqrt{a^2 + b + 2})x - 2, \quad l_2: y = 2(-a + \sqrt{a^2 + b + 2})x - 2$$

点 P の y 座標 $f(p)$ 、点 Q の y 座標 $f(q)$ は、それぞれ l_1 、 l_2 から、

$$\begin{aligned} f(p) &= 2(-a - \sqrt{a^2 + b + 2})(-\sqrt{a^2 + b + 2}) - 2 \\ &= 2a\sqrt{a^2 + b + 2} + 2(a^2 + b + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(q) &= 2(-a + \sqrt{a^2 + b + 2})(\sqrt{a^2 + b + 2}) - 2 \\ &= -2a\sqrt{a^2 + b + 2} + 2(a^2 + b + 1) \end{aligned}$$

よって、 $P(-\sqrt{a^2 + b + 2}, 2a\sqrt{a^2 + b + 2} + 2(a^2 + b + 1))$

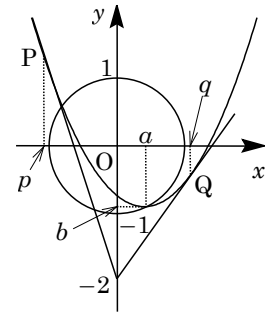
$$Q(\sqrt{a^2 + b + 2}, -2a\sqrt{a^2 + b + 2} + 2(a^2 + b + 1))$$

(2) 放物線 $y = f(x)$ と 2 直線 l_1 、 l_2 とで囲まれた部分の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_p^0 (x-p)^2 dx + \int_0^q (x-q)^2 dx = \frac{1}{3}[(x-p)^3]_p^0 + \frac{1}{3}[(x-q)^3]_0^q \\ &= -\frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{3}q^3 = \frac{1}{3}(q^3 - p^3) = \frac{2}{3}(\sqrt{a^2 + b + 2})^3 \end{aligned}$$

ここで、条件より、 $a^2 + b^2 = 1$ なので、

$$S = \frac{2}{3}(\sqrt{1 - b^2 + b + 2})^3 = \frac{2}{3}(\sqrt{-b^2 + b + 3})^3$$

(3) (2) から、 $S = \frac{2}{3}(\sqrt{-(b - \frac{1}{2})^2 + \frac{13}{4}})^3$ となり、 S の最大値は $\frac{2}{3} \cdot \frac{13}{4} \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{13}{12} \sqrt{13}$ である。このとき、 $(a, b) = (\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ となる。

[解説]

放物線と接線に囲まれた図形の面積が題材の有名問題です。計算はやや難です。

4

問題のページへ

- (1) 条件より, $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3 - 1 = 2$, $a_4 = 2 - 1 = 1$, $a_5 = 1 - 1 = 0$,
 $a_6 = 0 + 6 = 6$, $a_7 = 6 - 1 = 5$, $a_8 = 5 - 1 = 4$, $a_9 = 4 - 1 = 3$, $a_{10} = 3 + 6 = 9$
- (2) (1)の結果から, $a_1 = 0$ で, k を自然数とし, 以下のように推測できる。

$$a_{4k-2} = 3k, a_{4k-1} = 3k-1, a_{4k} = 3k-2, a_{4k+1} = 3k-3 \cdots \cdots (*)$$

推測(*)が正しいことを, 数学的帰納法を用いて証明する。

- (i) $k=1$ のとき (1)より, 成立している。
(ii) $k \leq l$ のとき (*)が成立していると仮定する。

このとき, $a_1 = 0$ から $a_{4l+1} = 3l-3$ までの値は, $3l$ 以下であり, しかも a_{4l+1} は
 $a_{4l-6} = a_{4(l-1)-2} = 3(l-1)$ と等しいので,

$$a_{4l+2} = 3l-3+6 = 3l+3, a_{4(l+1)-2} = 3(l+1)$$

$$a_{4l+3} = 3l+3-1 = 3l+2, a_{4(l+1)-1} = 3(l+1)-1$$

$$a_{4l+4} = 3l+2-1 = 3l+1, a_{4(l+1)} = 3(l+1)-2$$

$$a_{4l+5} = 3l+1-1 = 3l, a_{4(l+1)+1} = 3(l+1)-3$$

よって, $k=l+1$ のときも成立している。

- (i)(ii)より, すべての自然数 k に対して(*)は成立している。

したがって, $a_{2015} = a_{4 \times 504 - 1} = 3 \times 504 - 1 = 1511$

- (3) 初項から第 201 項までの和を S_{201} とおくと, $201 = 1 + 4 \times 50$ から,

$$\begin{aligned} S_{201} &= a_1 + \sum_{k=1}^{50} (a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} + a_{4k+1}) \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{50} (3k + 3k - 1 + 3k - 2 + 3k - 3) = \sum_{k=1}^{50} (12k - 6) = 6 \sum_{k=1}^{50} (2k - 1) \\ &= 6 \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 - 50 \right) = 6 \cdot 50^2 = 15000 \end{aligned}$$

[解説]

群数列の絡んだ漸化式の問題です。 a_1 を特別扱いして, a_2 から 4 項ずつのグループで考えていくところが複雑です。

5

問題のページへ

$$(1) f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \text{ から, 条件より, } f_2(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt = x - \frac{x^3}{6}$$

$$f_3(x) = 1 - \int_0^x f_2(t) dt = 1 - \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{6}\right) dt = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$(2) 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき, } g(x) = f_1(x) - \cos x + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x + \frac{x^4}{4!} \text{ とおくと,}$$

$$g'(x) = -x + \sin x + \frac{x^3}{3!}$$

すると, $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x$ より $g'(x) \geq 0$ となり, $g(x) \geq g(0) = 0$

また, $h(x) = \frac{x^4}{4!} - f_1(x) + \cos x = \frac{x^4}{4!} - 1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$ とおくと,

$$h'(x) = \frac{x^3}{3!} + x - \sin x$$

$\sin x \leq x$ より $h'(x) \geq 0$ となり, $h(x) \geq h(0) = 0$

以上より, $0 \leq x \leq 1$ において, $-\frac{x^4}{4!} \leq f_1(x) - \cos x \leq \frac{x^4}{4!}$

$$(3) 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき, 不等式 } -\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \leq f_{2m-1}(x) - \cos x \leq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cdots \cdots (*) \text{ が, す}$$

べての自然数 m に対して成り立つことを, 数学的帰納法により証明する。

(i) $m=1$ のとき (2)より, 成り立っている。

(ii) $m=l$ のとき $-\frac{x^{2l+2}}{(2l+2)!} \leq f_{2l-1}(x) - \cos x \leq \frac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}$ の成立を仮定すると,

$$-\int_0^x \frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!} dt \leq \int_0^x \{f_{2l-1}(t) - \cos t\} dt \leq \int_0^x \frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!} dt$$

よって, $-\frac{x^{2l+3}}{(2l+3)!} \leq f_{2l}(x) - \sin x \leq \frac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}$ となり,

$$-\int_0^x \frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!} dt \leq \int_0^x \{f_{2l}(t) - \sin t\} dt \leq \int_0^x \frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!} dt$$

よって, $-\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!} \leq 1 - f_{2l+1}(x) + \cos x - 1 \leq \frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$ となり,

$$-\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!} \leq f_{2l+1}(x) - \cos x \leq \frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$$

すると, $m=l+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より, 自然数 m に対して(*)は成り立っている。

(4) (*)に $x = \frac{\pi}{6}$ を代入すると,

$$-\frac{1}{(2m+2)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2} \leq f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{(2m+2)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2}$$

すると、 $0 < \frac{\pi}{6} < 1$ から、 $m \rightarrow \infty$ のとき、 $f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 0$ となるので、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[解説]

定積分と不等式、加えて極限を問うものです。記述量は多いですが、方針に迷いが生ずることはないでしょう。