1　　解答解説のページへ

整式$P(x)=x^4+x^3+x-1$について，次の問いに答えよ。

(1)　iを虚数単位とするとき，$P(i)$，$P(-i)$の値を求めよ。

(2)　方程式$P(x)=0$の実数解を求めよ。

(3)　$Q(x)$を3次以下の整式とする。次の条件

$$Q(1)=P(1),\ Q(-1)=P(-1),\ Q(2)=P(2),\ Q(-2)=P(-2)$$

をすべて満たす$Q(x)$を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

　$\triangle$OAB において，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=7$とする。t を$0<t<1$を満たす実数とする。辺 OA を$t:(1-t)$に内分する点を P, 辺 OB を$1:t$に外分する点を Q, 辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を t, $\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$を t, $\vec{b}$を用いて表せ。

(4)　線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

3 が書かれたカードが 10 枚，5 が書かれたカードが 10 枚，10 が書かれたカードが 10 枚，全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき，取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず 3，5，10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし，取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

(1) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。

(2) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。

(3) 操作が終了したときに，取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\left|x^2-4\right|-3$ について，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(3) 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$P(x)=x^4+x^3+x-1$ に対して,

$$P(i)=1-i+i-1=0,\ P(-i)=1+i-i-1=0$$

(2)　(1)より，$P(x)$ は $(x-i)$ と $(x+i)$ を因数にもつ, すなわち $(x-i)(x+i)=x^2+1$ で割り切れ,

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+x-1)$$

すると，$P(x)=0$ の実数解は，$x^2+x-1=0$ から $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ である。

(3)　3 次以下の整式 $Q(x)$ に対して，$R(x)=P(x)-Q(x)$ とおくと，$R(x)$ は 4 次の整式で, しかも 4 次の係数が 1 である。

そして，条件から $R(1)=R(-1)=R(2)=R(-2)=0$ なので，$R(x)$ は $(x-1)$, $(x+1)$，$(x-2)$，$(x+2)$ を因数にもつ。

これらのことをまとめると,

$$R(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=(x^2-1)(x^2-4)=x^4-5x^2+4$$

すると，$Q(x)=P(x)-R(x)$ より,

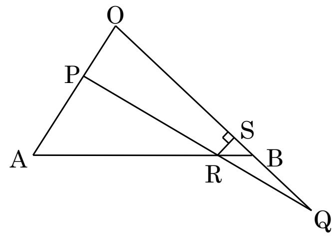
$$Q(x)=(x^4+x^3+x-1)-(x^4-5x^2+4)=x^3+5x^2+x-5$$

［解　説］

因数定理を理解するための基本問題です。

2

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=7$である△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とすると，余弦定理から，

$$5^2+6^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=7^2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{25+36-49}{2}=6$$

(2)　△OAB と直線 PQ にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QO}}=1,\ \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{t}{1}=1$$

よって，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{1-t}{t^2}$より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{t^2}{t^2-t+1}\vec{a}+\dfrac{1-t}{t^2-t+1}\vec{b}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$は$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の OB への正射影ベクトルであり，$|\vec{b}|=6$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\Big(\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\frac{\vec{b}}{6}\Big)\frac{\vec{b}}{6}=\frac{1}{36(t^2-t+1)}\{(t^2\vec{a}+(1-t)\vec{b})\cdot\vec{b}\}\vec{b}$$

$$=\frac{1}{36(t^2-t+1)}\{6t^2+36(1-t)\}\vec{b}=\frac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)}\vec{b}$$

(4)　$|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=4$なので，(3)の結果から，$\dfrac{|t^2-6t+6|}{6|t^2-t+1|}\cdot 6=4$，$\dfrac{|t^2-6t+6|}{|t^2-t+1|}=4$

$0<t<1$のとき，$t^2-6t+6=t^2+6(1-t)>0$，$t^2-t+1=t^2+(1-t)>0$から，

$$\frac{t^2-6t+6}{t^2-t+1}=4,\ t^2-6t+6=4(t^2-t+1),\ 3t^2+2t-2=0$$

すると，$0<t<1$から，$t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。(2)は分点ベクトル表示，(3)は$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\vec{b}=0$を用いる解法でも，少し記述量が多くなるだけです。

3

問題のページへ

(1)　3 のカード, 5 のカード, 10 のカードがそれぞれ 10 枚ずつ, 全部で 30 枚のカードが箱の中にあり, この中から 1 枚ずつカードを取り出していき, 取り出したカードの数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。

さて, 1 回取り出したとき操作が終了するのは, 10 のカードを取り出した場合だけより, その確率は, $\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　2 回取り出したとき操作が終了するのは, 次の場合がある。

(i)　1 回目が 3 のカードで, 2 回目が 10 のカードを取り出したとき

その確率は, $\dfrac{10}{30}\cdot\dfrac{10}{29}=\dfrac{10}{3\cdot 29}$ である。

(ii)　1 回目が 5 のカードで, 2 回目が 5 または 10 のカードを取り出したとき

その確率は, $\dfrac{10}{30}\cdot\dfrac{9+10}{29}=\dfrac{19}{3\cdot 29}$ である。

(i)(ii)より, 2 回取り出したとき操作が終了する確率は, $\dfrac{10}{3\cdot 29}+\dfrac{19}{3\cdot 29}=\dfrac{1}{3}$

(3)　まず, 数の合計が 10 または 11 で操作が終了する場合を考える。

(i)　数の合計が 10 で操作が終了する場合

1 回目が 10, または 1 回目と 2 回目がともに 5 の場合より, その確率は,

$$\frac{10}{30}+\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}=\frac{38}{3\cdot 29}$$

(ii)　数の合計が 11 で操作が終了する場合

1 回目, 2 回目, 3 回目の数が, 3→3→5 または 3→5→3 または 5→3→3 の場合より, その確率は,

$$\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{10}{28}+\frac{10}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{9}{28}+\frac{10}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{9}{28}=\frac{45}{14\cdot 29}$$

(i)(ii)より, 数の合計が 10 または 11 で操作が終了する確率は,

$$\frac{38}{3\cdot 29}+\frac{45}{14\cdot 29}=\frac{667}{3\cdot 14\cdot 29}=\frac{23}{42}$$

すると, カードを多くとも 4 回取り出せば, 操作は必ず終了するので, 操作が終了したときに, 取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率は,

$$1-\frac{23}{42}=\frac{19}{42}$$

［解　説］

確率の基本的な問題です。(3)は, 取り出した回数で場合分けをしても構いませんが, 数値計算がややこしくなります。

$\boxed{4}$　　問題のページへ

(1)　関数 $f(x)=\left|x^2-4\right|-3$ に対して，

(i)　$x\leqq -2$，$2\leqq x$ のとき　$f(x)=x^2-4-3=x^2-7$

$f(x)=0$ とすると $x=\pm\sqrt{7}$ となり，ともに $x\leqq -2$，$2\leqq x$ を満たす。

(ii)　$-2<x<2$ のとき　$f(x)=-x^2+4-3=-x^2+1$

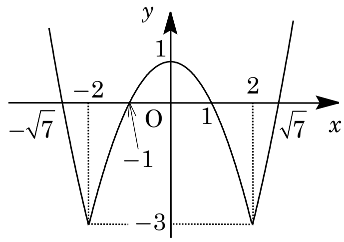
$f(x)=0$ とすると $x=\pm 1$ となり，ともに $-2<x<2$ を満たす。

(i)(ii)より，$f(x)=0$ の解は，$x=\pm 1,\ \pm\sqrt{7}$ である。

(2)　(1)より，$f(x)=x^2-7\ (x\leqq -2,\ 2\leqq x)$

$f(x)=-x^2+1\ (-2<x<2)$

これより，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(3)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積を S とすると，y 軸についての対称性より，

$$S=2\int_0^1(-x^2+1)\,dx+2\int_1^2-(-x^2+1)\,dx+2\int_2^{\sqrt{7}}-(x^2-7)\,dx$$

$$=2\Big[-\frac{x^3}{3}+x\Big]_0^1+2\Big[\frac{x^3}{3}-x\Big]_1^2+2\Big[-\frac{x^3}{3}+7x\Big]_2^{\sqrt{7}}$$

$$=-\frac{2}{3}+2+\frac{14}{3}-2-\frac{2}{3}(7\sqrt{7}-8)+14(\sqrt{7}-2)=\frac{28}{3}\sqrt{7}-\frac{56}{3}$$

［解　説］

定積分と面積についての基本的な問題です。