1　　解答解説のページへ

整式$P(x)=x^4+x^3+x-1$について，次の問いに答えよ。

(1)　iを虚数単位とするとき，$P(i)$，$P(-i)$の値を求めよ。

(2)　方程式$P(x)=0$の実数解を求めよ。

(3)　$Q(x)$を 3 次以下の整式とする。次の条件

$$Q(1)=P(1),\ Q(-1)=P(-1),\ Q(2)=P(2),\ Q(-2)=P(-2)$$

をすべて満たす$Q(x)$を求めよ。

2

解答解説のページへ

$\triangle$OAB において，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=7$ とする。t を $0<t<1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を P, 辺 OB を $1:t$ に外分する点を Q, 辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を t, $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を t, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(4) 線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

3 が書かれたカードが 10 枚，5 が書かれたカードが 10 枚，10 が書かれたカードが 10 枚，全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき，取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず 3, 5, 10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし，取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

(1) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。

(2) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。

(3) 操作が終了したときに，取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

a を $0<a<1$ を満たす実数として x の関数 $f(x)=ax-\log(1+e^x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$M(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　a の関数 $y=M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(3)　a の関数 $y=M(a)$ のグラフをかけ。

5

解答解説のページへ

一般項が $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(3) 2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。

1　　　　問題のページへ

(1)　$P(x)=x^4+x^3+x-1$ に対して,

$$P(i)=1-i+i-1=0,\ P(-i)=1+i-i-1=0$$

(2)　(1)より，$P(x)$ は $(x-i)$ と $(x+i)$ を因数にもつ, すなわち $(x-i)(x+i)=x^2+1$ で割り切れ,

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+x-1)$$

すると，$P(x)=0$ の実数解は，$x^2+x-1=0$ から $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ である。

(3)　3 次以下の整式 $Q(x)$ に対して，$R(x)=P(x)-Q(x)$ とおくと，$R(x)$ は 4 次の整式で, しかも 4 次の係数が 1 である。

そして，条件から $R(1)=R(-1)=R(2)=R(-2)=0$ なので，$R(x)$ は $(x-1)$, $(x+1)$，$(x-2)$，$(x+2)$ を因数にもつ。

これらのことをまとめると,

$$R(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=(x^2-1)(x^2-4)=x^4-5x^2+4$$

すると，$Q(x)=P(x)-R(x)$ より,

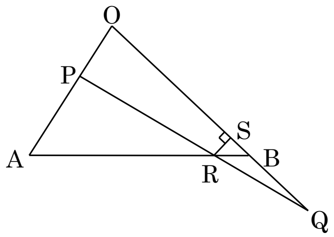
$$Q(x)=(x^4+x^3+x-1)-(x^4-5x^2+4)=x^3+5x^2+x-5$$

［解 説］

因数定理を理解するための基本問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　OA $=5$，OB $=6$，AB $=7$ である△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とすると，余弦定理から，

$$5^2+6^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=7^2,\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{25+36-49}{2}=6$$

(2)　△OAB と直線 PQ にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QO}}=1,\ \ \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{t}{1}=1$$

よって，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{1-t}{t^2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{t^2}{t^2-t+1}\vec{a}+\dfrac{1-t}{t^2-t+1}\vec{b}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の OB への正射影ベクトルであり，$|\vec{b}|=6$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\Big(\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\frac{\vec{b}}{6}\Big)\frac{\vec{b}}{6}=\frac{1}{36(t^2-t+1)}\{(t^2\vec{a}+(1-t)\vec{b})\cdot\vec{b}\}\vec{b}$$

$$=\frac{1}{36(t^2-t+1)}\{6t^2+36(1-t)\}\vec{b}=\frac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)}\vec{b}$$

(4)　$|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=4$ なので，(3)の結果から，$\dfrac{|t^2-6t+6|}{6|t^2-t+1|}\cdot 6=4$，$\dfrac{|t^2-6t+6|}{|t^2-t+1|}=4$

$0<t<1$ のとき，$t^2-6t+6=t^2+6(1-t)>0$，$t^2-t+1=t^2+(1-t)>0$ から，

$$\frac{t^2-6t+6}{t^2-t+1}=4,\ \ t^2-6t+6=4(t^2-t+1),\ \ 3t^2+2t-2=0$$

すると，$0<t<1$ から，$t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

［解 説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。(2)は分点ベクトル表示，(3)は $\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\vec{b}=0$ を用いる解法でも，少し記述量が多くなるだけです。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　3 のカード, 5 のカード, 10 のカードがそれぞれ 10 枚ずつ, 全部で 30 枚のカードが箱の中にあり, この中から 1 枚ずつカードを取り出していき, 取り出したカードの数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。

さて, 1 回取り出したとき操作が終了するのは, 10 のカードを取り出した場合だけより, その確率は, $\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　2 回取り出したとき操作が終了するのは, 次の場合がある。

(i)　1 回目が 3 のカードで, 2 回目が 10 のカードを取り出したとき

その確率は, $\dfrac{10}{30}\cdot\dfrac{10}{29}=\dfrac{10}{3\cdot 29}$ である。

(ii)　1 回目が 5 のカードで, 2 回目が 5 または 10 のカードを取り出したとき

その確率は, $\dfrac{10}{30}\cdot\dfrac{9+10}{29}=\dfrac{19}{3\cdot 29}$ である。

(i)(ii)より, 2 回取り出したとき操作が終了する確率は, $\dfrac{10}{3\cdot 29}+\dfrac{19}{3\cdot 29}=\dfrac{1}{3}$

(3)　まず, 数の合計が 10 または 11 で操作が終了する場合を考える。

(i)　数の合計が 10 で操作が終了する場合

1 回目が 10, または 1 回目と 2 回目がともに 5 の場合より, その確率は,

$$\frac{10}{30}+\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}=\frac{38}{3\cdot 29}$$

(ii)　数の合計が 11 で操作が終了する場合

1 回目, 2 回目, 3 回目の数が, 3→3→5 または 3→5→3 または 5→3→3 の場合より, その確率は,

$$\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{10}{28}+\frac{10}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{9}{28}+\frac{10}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{9}{28}=\frac{45}{14\cdot 29}$$

(i)(ii)より, 数の合計が 10 または 11 で操作が終了する確率は,

$$\frac{38}{3\cdot 29}+\frac{45}{14\cdot 29}=\frac{667}{3\cdot 14\cdot 29}=\frac{23}{42}$$

すると, カードを多くとも 4 回取り出せば, 操作は必ず終了するので, 操作が終了したときに, 取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率は,

$$1-\frac{23}{42}=\frac{19}{42}$$

［解 説］

確率の基本的な問題です。(3)は, 取り出した回数で場合分けをしても構いませんが, 数値計算がややこしくなります。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$0<a<1$ のとき，$f(x)=ax-\log(1+e^x)$ に対して，

$$f'(x)=a-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{a+ae^x-e^x}{1+e^x}=-\frac{(1-a)e^x-a}{1+e^x}$$

ここで，$\dfrac{a}{1-a}>0$ より $e^x=\dfrac{a}{1-a}$ を満たす x がただ 1 つ存在し，これを $x=\alpha$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

すると，最大値 $M(a)$ は，$e^\alpha=\dfrac{a}{1-a}$ から，

$$M(a)=f(\alpha)=a\alpha-\log(1+e^\alpha)=a\log\frac{a}{1-a}-\log\left(1+\frac{a}{1-a}\right)$$

$$=a\log a-a\log(1-a)-\log\frac{1}{1-a}=a\log a-a\log(1-a)+\log(1-a)$$

$$=a\log a+(1-a)\log(1-a)$$

(2)　(1)より，$0<a<1$ において，

$$M'(a)=\log a+1-\log(1-a)-1$$

$$=\log a-\log(1-a)$$

$M'(a)=0$ とすると，$a=1-a$ から $a=\dfrac{1}{2}$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$M'(a)$		$-$	0	$+$	
$M(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

すると，$M(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小となり，最小値は,

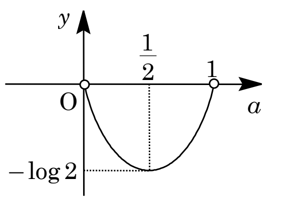
$$M\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{2}=-\log 2$$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ より，$\displaystyle\lim_{a\to+0}M(a)=\lim_{a\to+0}\{a\log a+(1-a)\log(1-a)\}=0$

$$\lim_{a\to1-0}M(a)=\lim_{a\to1-0}\{a\log a+(1-a)\log(1-a)\}=0$$

また，$M''(a)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{1-a}>0$ となるので，$y=M(a)$ のグラフは下に凸である。

以上より，$y=M(a)$ のグラフは右図のようになる。



［解 説］

微分法に関する総合的な問題です。計算は易しめです。

$\boxed{5}$ 問題のページへ

(1)　$n \geqq 2$ のとき，$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)n \leqq 1\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n = n^{n-1}$ となり，

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leqq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

(2)　$\displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(3)　2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle b_n = \log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log\frac{a_{kn}}{a_n}$ とおくと，

$$b_n = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!}\left(\frac{1}{k^k n^{k-1}}\right)^n = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!} - \log k^k n^{k-1}$$

$$= \frac{1}{n}\log\{(n+1)(n+2)\cdots(kn)\} - k\log k - (k-1)\log n$$

$$= \frac{1}{n}\{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn)\} - (k-1)\log n - k\log k$$

$$= \frac{1}{n}\{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn) - (k-1)n\log n\} - k\log k$$

$$= \frac{1}{n}\{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn) - (kn-n)\log n\} - k\log k$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\log\frac{n+1}{n} + \log\frac{n+2}{n} + \cdots + \log\frac{n+(k-1)n}{n}\right\} - k\log k$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \log\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{(k-1)n}{n}\right)\right\} - k\log k$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \int_0^{k-1}\log(1+x)\,dx - k\log k$$

$$= \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^{k-1} - \int_0^{k-1}dx - k\log k$$

$$= k\log k - (k-1) - k\log k = 1-k$$

よって，$\displaystyle\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{b_n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{1-k}$ である。

［解 説］

誘導のない極限の設問 3 題で構成されています。しかも，各問の相互関係もあまり感じられません。