1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　解答解説のページへ

式の展開に関する次の問いに答えよ。

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ。

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標空間内の次のような 4 点 A, B, C, D を考える。A の座標は$(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$，3 点 B, C, D は，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸上にある。さらに，これらの 4 点は同一平面上にあり，四角形 ABCD は平行四辺形である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 点 B, C, D の座標を求めよ。

(2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

(3) 原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1=\frac{1}{3},\ \ a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5を求めよ。

(2)　一般項a_nを推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　不等式$a_n>1-10^{-18}$を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし$\log_{10}2=0.3010$とする。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

座標平面上の放物線 $y=-ax^2+b$ を C とし，P(1, 0)，Q(0, 2) とする。ただし，$a>0$，$0<b<2$ とする。放物線 C は，2 点 P, Q を通る直線に接している。放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) a を b で表せ。

(2) S を b を用いて表せ。

(3) $\dfrac{S}{\sqrt{b}}$ が最大になるように b の値を定めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数は，$\dfrac{6!}{1!2!3!}=60$ である。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式の一般項は,

$$\frac{8!}{(8-p-q)!p!q!}x^p(xy)^q=\frac{8!}{(8-p-q)!p!q!}x^{p+q}y^q$$

このとき x^5y^3 の項の係数は，$p+q=5$ かつ $q=3$ から $(p,\ q)=(2,\ 3)$ となり，

$$\frac{8!}{(8-2-3)!2!3!}=\frac{8!}{3!2!3!}=560$$

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式の一般項は,

$$\frac{10!}{(10-p-q-r)!p!q!r!}x^p(xy)^q(xy^2)^r=\frac{10!}{(10-p-q-r)!p!q!r!}x^{p+q+r}y^{q+2r}$$

このとき x^8y^{13} の項について，$p+q+r=8$ かつ $q+2r=13$ から，

$$q=-2r+13,\quad p=8-(-2r+13)-r=r-5$$

ここで, p, q, r は 0 以上の整数で，$r-5\geqq 0$ かつ $-2r+13\geqq 0$ かつ $r\geqq 0$ から，

$$r=5,\ 6$$

よって，$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 5)$，$(1,\ 1,\ 6)$ となり，x^8y^{13} の項の係数は,

$$\frac{10!}{(10-3-5)!0!3!5!}+\frac{10!}{(10-1-1-6)!1!1!6!}=\frac{10!}{2!3!5!}+\frac{10!}{2!6!}=5040$$

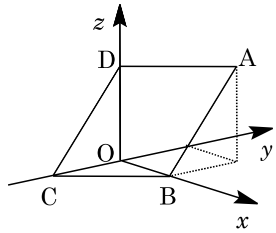
［解 説］

二項定理を拡張した多項定理を理解するための例題のような問題です。

© 電送数学舎 2017

2

問題のページへ



(1)　A$(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$ に対して，B$(b,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ c,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ d)$ とおくと，四角形 ABCD は平行四辺形より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ となり，

$$(b-\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{6})=(0,\ c,\ -d)$$

よって，$b=\sqrt{2}$，$c=-\sqrt{3}$，$d=\sqrt{6}$ から，B$(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，C$(0,\ -\sqrt{3},\ 0)$，D$(0,\ 0,\ \sqrt{6})$ である。

(2)　(1)から，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(0,\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{6})$ となり，平行四辺形 ABCD の面積 S は,

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}})^2}=\sqrt{(2+3)(3+6)-(-3)^2}=6$$

(3)　点 H は平行四辺形 ABCD を含む平面上にあるので, s, t を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DA}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(\sqrt{2}s,\ \sqrt{3}(s-t),\ \sqrt{6}(1-t))$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=0$ となり,

$$2s+3(s-t)=0,\ 5s-3t=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=0$ となり,

$$-3(s-t)-6(1-t)=0,\ s-3t+2=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{5}{6}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

よって，H$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ となる。

［解 説］

空間図形の基本問題です。計算も複雑ではありません。

© 電送数学舎 2017

3

問題のページへ

(1)　$a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$に対して，

$$a_2=\frac{\frac{3}{3}+1}{\frac{1}{3}+3}=\frac{3}{5},\ a_3=\frac{\frac{9}{5}+1}{\frac{3}{5}+3}=\frac{7}{9},\ a_4=\frac{\frac{21}{9}+1}{\frac{7}{9}+3}=\frac{15}{17},\ a_5=\frac{\frac{45}{17}+1}{\frac{15}{17}+3}=\frac{31}{33}$$

(2)　(1)より，$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$と推測でき，この式を数学的帰納法によって証明する。

(i)　$n=1$のとき　$a_n=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$より成立する。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k=\dfrac{2^k-1}{2^k+1}$と仮定すると，

$$a_{n+1}=\frac{\frac{3(2^k-1)}{2^k+1}+1}{\frac{2^k-1}{2^k+1}+3}=\frac{3\cdot 2^k-3+2^k+1}{2^k-1+3\cdot 2^k+3}=\frac{4\cdot 2^k-2}{4\cdot 2^k+2}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}+1}$$

よって，$n=k+1$のときも成立している。

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$である。

(3)　$a_n>1-10^{-18}$とすると，$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}=1-\dfrac{2}{2^n+1}$より，

$$-\frac{2}{2^n+1}>-10^{-18},\ 2^n+1>2\cdot 10^{18}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，自然数nに対し$2^n=2\cdot 10^{18}$となる場合はなく，(*)を$2^n>2\cdot 10^{18}$として，

$$2^{n-1}>10^{18},\ (n-1)\log_{10}2>18,\ n>\frac{18}{\log_{10}2}+1=\frac{18}{0.3010}+1>60.8$$

よって，求める最小のnは61である。

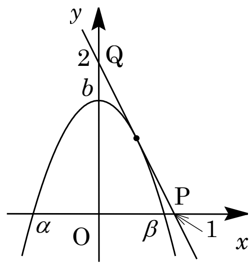
［解　説］

漸化式の基本問題です。推測→帰納法での証明という方針も問題文中に示されています。なお，(2)の推測に時間がかかるときは，たとえば分母だけを取り出した数列の階差数列が等比数列ということに着目する手もあります。

© 電送数学舎 2017

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　放物線 $C : y = -ax^2 + b$ と直線 $\mathrm{PQ} : y = -2x + 2$ を連立し,

$$-ax^2 + b = -2x + 2\,,\ \ ax^2 - 2x + 2 - b = 0$$

重解をもつことより，$D/4 = 1 - a(2-b) = 0$ となり，$a > 0$，$0 < b < 2$ から，$a = \dfrac{1}{2-b}$ である。

(2)　C と x 軸の交点は，$-ax^2 + b = 0$ から,

$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}} = \pm\sqrt{b(2-b)}$$

ここで，$\alpha = -\sqrt{b(2-b)}$，$\beta = \sqrt{b(2-b)}$ とおくと，放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積 S は,

$$S = \int_\alpha^\beta (-ax^2 + b)\,dx = -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -a\Big(-\frac{1}{6}\Big)(\beta-\alpha)^3$$

$$= \frac{1}{6}a\big\{2\sqrt{b(2-b)}\,\big\}^3 = \frac{1}{6(2-b)}\cdot 8b(2-b)\sqrt{b(2-b)} = \frac{4}{3}b\sqrt{b(2-b)}$$

(3)　(2)から，$\dfrac{S}{\sqrt{b}} = \dfrac{4}{3}b\sqrt{2-b} = \dfrac{4}{3}\sqrt{b^2(2-b)} = \dfrac{4}{3}\sqrt{2b^2 - b^3}$

ここで，$f(b) = 2b^2 - b^3$ とおくと,

$$f'(b) = 4b - 3b^2 = b(4-3b)$$

すると，$f(b)$ の増減は右表のようになり，$\dfrac{S}{\sqrt{b}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{f(b)}$ から，$b = \dfrac{4}{3}$ のとき $\dfrac{S}{\sqrt{b}}$ は最大になる。

b	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$f'(b)$	0	$+$	0	$-$	
$f(b)$		$\nearrow$		$\searrow$	

［解　説］

定積分と面積についての頻出基本題です。

© 電送数学舎 2017