1

解答解説のページへ

式の展開に関する次の問いに答えよ。

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ。

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標空間内の次のような 4 点 A, B, C, D を考える。A の座標は$(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$, 3 点 B, C, D は, それぞれ x 軸, y 軸, z 軸上にある。さらに, これらの 4 点は同一平面上にあり, 四角形 ABCD は平行四辺形である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　3 点 B, C, D の座標を求めよ。

(2)　平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

(3)　原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5を求めよ。

(2)　一般項a_nを推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　不等式$a_n>1-10^{-18}$を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし$\log_{10}2=0.3010$とする。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

t は $t>\dfrac{1}{2}$ を満たす実数とする。座標平面上に楕円 $x^2+4y^2=1$ が与えられている。点 $\mathrm{P}(-1,\ -t)$ からこの楕円に引いた接線のうちで y 軸と平行でない接線を l, その接点を $\mathrm{Q}(a,\ b)$ とする。また, x 軸, y 軸および接線 l で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ における接線 l の方程式は, $ax+4by=1$ であることを示せ。

(2) a, b を, それぞれ t を用いて表せ。

(3) 面積 $S(t)$ を, t を用いて表せ。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t}$ を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

$f(x)=xe^{1-x^2}$ とする。2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=x^k$ で囲まれた部分の面積を S_k とする。ただし，k は自然数とする。次の問いに答えよ。必要があれば，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の極値，グラフの凹凸と変曲点，および漸近線を求め，グラフの概形をかけ。

(3)　S_k を，k を用いて表せ。

(4)　次の条件(＊)を満たす最小の自然数 n を求めよ。

　(＊)　すべての自然数 m に対して，$4S_{2n-1}>7S_{2m}$ が成り立つ。

1

問題のページへ

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数は，$\dfrac{6!}{1!2!3!}=60$ である。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式の一般項は,

$$\frac{8!}{(8-p-q)!\,p!\,q!}x^p(xy)^q=\frac{8!}{(8-p-q)!\,p!\,q!}x^{p+q}y^q$$

このとき x^5y^3 の項の係数は，$p+q=5$ かつ $q=3$ から $(p,\ q)=(2,\ 3)$ となり，

$$\frac{8!}{(8-2-3)!2!3!}=\frac{8!}{3!2!3!}=560$$

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式の一般項は,

$$\frac{10!}{(10-p-q-r)!\,p!\,q!\,r!}x^p(xy)^q(xy^2)^r=\frac{10!}{(10-p-q-r)!\,p!\,q!\,r!}x^{p+q+r}y^{q+2r}$$

このとき x^8y^{13} の項について，$p+q+r=8$ かつ $q+2r=13$ から，

$$q=-2r+13,\quad p=8-(-2r+13)-r=r-5$$

ここで, p, q, r は 0 以上の整数で，$r-5\geqq 0$ かつ $-2r+13\geqq 0$ かつ $r\geqq 0$ から，

$$r=5,\ 6$$

よって，$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 5)$，$(1,\ 1,\ 6)$ となり，x^8y^{13} の項の係数は,

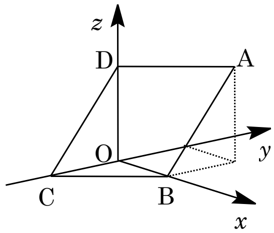
$$\frac{10!}{(10-3-5)!0!3!5!}+\frac{10!}{(10-1-1-6)!1!1!6!}=\frac{10!}{2!3!5!}+\frac{10!}{2!6!}=5040$$

［解 説］

二項定理を拡張した多項定理を理解するための例題のような問題です。

2

問題のページへ



(1)　$A(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$ に対して，$B(b,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ c,\ 0)$，$D(0,\ 0,\ d)$ とおくと，四角形 ABCD は平行四辺形より，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ となり，

$$(b-\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{6})=(0,\ c,\ -d)$$

よって，$b=\sqrt{2}$，$c=-\sqrt{3}$，$d=\sqrt{6}$ から，$B(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$C(0,\ -\sqrt{3},\ 0)$，$D(0,\ 0,\ \sqrt{6})$ である。

(2)　(1)から，$\overrightarrow{DA}=(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 0)$，$\overrightarrow{DC}=(0,\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{6})$ となり，平行四辺形 ABCD の面積 S は,

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{DA}|^2|\overrightarrow{DC}|^2-(\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC})^2}=\sqrt{(2+3)(3+6)-(-3)^2}=6$$

(3)　点 H は平行四辺形 ABCD を含む平面上にあるので, $s,\ t$ を実数として,

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+s\overrightarrow{DA}+t\overrightarrow{DC}=(\sqrt{2}s,\ \sqrt{3}(s-t),\ \sqrt{6}(1-t))$$

すると，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{DA}$ から $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{DA}=0$ となり,

$$2s+3(s-t)=0,\ 5s-3t=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{DC}$ から $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{DC}=0$ となり,

$$-3(s-t)-6(1-t)=0,\ s-3t+2=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{5}{6}$ となり，$\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

よって，$H\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ となる。

［解 説］

空間図形の基本問題です。計算も複雑ではありません。

３

問題のページへ

(1)　$a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$に対して，

$$a_2=\frac{\frac{3}{3}+1}{\frac{1}{3}+3}=\frac{3}{5},\ a_3=\frac{\frac{9}{5}+1}{\frac{3}{5}+3}=\frac{7}{9},\ a_4=\frac{\frac{21}{9}+1}{\frac{7}{9}+3}=\frac{15}{17},\ a_5=\frac{\frac{45}{17}+1}{\frac{15}{17}+3}=\frac{31}{33}$$

(2)　(1)より，$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$と推測でき，この式を数学的帰納法によって証明する。

(i)　$n=1$のとき　$a_n=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$より成立する。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k=\dfrac{2^k-1}{2^k+1}$と仮定すると，

$$a_{n+1}=\frac{\frac{3(2^k-1)}{2^k+1}+1}{\frac{2^k-1}{2^k+1}+3}=\frac{3\cdot2^k-3+2^k+1}{2^k-1+3\cdot2^k+3}=\frac{4\cdot2^k-2}{4\cdot2^k+2}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}+1}$$

よって，$n=k+1$のときも成立している。

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$である。

(3)　$a_n>1-10^{-18}$とすると，$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}=1-\dfrac{2}{2^n+1}$より，

$$-\frac{2}{2^n+1}>-10^{-18},\ 2^n+1>2\cdot10^{18}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，自然数nに対し$2^n=2\cdot10^{18}$となる場合はなく，$(*)$を$2^n>2\cdot10^{18}$として，

$$2^{n-1}>10^{18},\ (n-1)\log_{10}2>18,\ n>\frac{18}{\log_{10}2}+1=\frac{18}{0.3010}+1>60.8$$

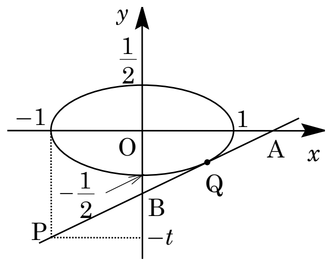
よって，求める最小のnは61である。

［解　説］

漸化式の基本問題です。推測→帰納法での証明という方針も問題文中に示されています。なお，(2)の推測に時間がかかるときは，たとえば分母だけを取り出した数列の階差数列が等比数列ということに着目する手もあります。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　楕円 $x^2+4y^2=1$ ……①の両辺を x で微分すると,

$$2x+8y\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}\ (y\neq 0)$$

点 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ における接線 l の方程式は,

$$y-b=-\frac{a}{4b}(x-a),\ ax+4by=a^2+4b^2$$

点 Q は①上にあるので, $a^2+4b^2=1$ ……②となり,

$$l: ax+4by=1 \text{ ………③}$$

(2)　$\mathrm{P}(-1,\ -t)$ は③上にあるので $-a-4bt=1$ となり, $a=-4bt-1$ ………④

②④より, $(-4bt-1)^2+4b^2=1$ となり, $(4t^2+1)b^2+2tb=0$ で $b\neq 0$ から,

$$b=-\frac{2t}{4t^2+1},\ a=\frac{8t^2}{4t^2+1}-1=\frac{4t^2-1}{4t^2+1}$$

(3)　接線 l と x 軸, y 軸との交点をそれぞれ A, B とおくと, ③から, $\mathrm{A}\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{1}{4b}\right)$ となる。

ここで, $t>\frac{1}{2}$ から $a>0$, $b<0$ に注意すると, x 軸, y 軸および接線 l で囲まれた部分の面積 $S(t)$ は, (3)より,

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{4b}\right)=-\frac{1}{8ab}=\frac{(4t^2+1)^2}{16t(4t^2-1)}$$

(4)　$$\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2+1)^2}{16t^2(4t^2-1)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(4+\frac{1}{t^2}\right)^2}{16\left(4-\frac{1}{t^2}\right)}=\frac{16}{16\cdot 4}=\frac{1}{4}$$

［解　説］

楕円を題材にした基本的な問題です。

$\boxed{5}$　　問題のページへ

(1)　$f(x)=xe^{1-x^2}$ に対し，$f'(x)=e^{1-x^2}+xe^{1-x^2}(-2x)=(1-2x^2)e^{1-x^2}$

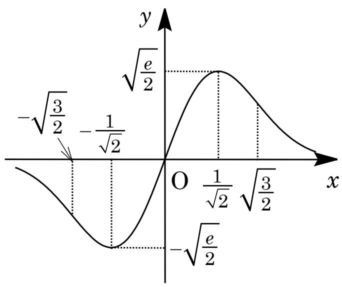
$$f''(x)=-4xe^{1-x^2}+(1-2x^2)e^{1-x^2}(-2x)=2x(2x^2-3)e^{1-x^2}$$

(2)　$f(-x)=-xe^{1-x^2}=-f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは原点対称となる。

以下，$x\geqq 0$ で $f(x)$ の増減およびグラフの凹凸を調べると，右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	e	$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{\dfrac{e}{2}}$	↘	$\sqrt{\dfrac{3}{2e}}$	↘

そして，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=e\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}=0$ に注意して，グラフの概形をかくと，右図の通りである。



すると，極大値は $\sqrt{\dfrac{e}{2}}\ \left(x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，極小値は $-\sqrt{\dfrac{e}{2}}\ \left(x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。また，変曲点の座標は $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ -\sqrt{\dfrac{3}{2e}}\right)$，$(0,\ 0)$，$\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ \sqrt{\dfrac{3}{2e}}\right)$ である。

なお，漸近線の方程式は，$y=0$ となる。

(3)　k を自然数とするとき，曲線 $y=x^k$ について，k が奇数のとき原点対称，k が偶数のとき y 軸対称である。

また，$y=f(x)$ と $y=x^k$ の $x>0$ の交点は，$f(x)=x^k$ から，

$$xe^{1-x^2}=x^k,\ e^{1-x^2}=x^{k-1}$$

これより，$x=1$ となる。

さて，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=x^k$ で囲まれた部分の面積 S_k は，

(i)　k が奇数のとき

$$S_k=2\int_0^1(xe^{1-x^2}-x^k)dx=2\Big[-\frac{1}{2}e^{1-x^2}-\frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big]_0^1=e-1-\frac{2}{k+1}$$

(ii)　k が偶数のとき

$$S_k=\int_0^1(xe^{1-x^2}-x^k)dx=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}$$

(4)　(3)から，$S_{2n-1}=e-1-\dfrac{1}{n}$，$S_{2m}=\dfrac{e}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2m+1}$

(＊)より，すべての自然数 m に対して $4S_{2n-1}>7S_{2m}$ が成り立つことより，

$$4\Big(e-1-\frac{1}{n}\Big)>7\Big(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2m+1}\Big),\ \frac{e}{2}-\frac{1}{2}-\frac{4}{n}>-\frac{7}{2m+1}$$

よって，$\dfrac{4}{n}-\dfrac{e-1}{2}<\dfrac{7}{2m+1}$ ………(＊＊)

ここで，すべての自然数 m に対して，$0<\dfrac{7}{2m+1}\leqq\dfrac{7}{3}$ なので，$(**)$が成立する n の条件は，$\dfrac{4}{n}-\dfrac{e-1}{2}\leqq 0$ となり，

$$\frac{4}{n}\leqq\frac{e-1}{2},\ \ n\geqq\frac{8}{e-1}$$

すると，$2.7<e<2.8$ から，$4.4<\dfrac{8}{e-1}<4.8$ となるので，$n\geqq 5$ である。

以上より，求める最小の自然数 n は $n=5$ である。

［解 説］

微積分の総合問題です。細かい誘導のため方針に迷うことはありませんが，完答のためのポイントは，(3)で点 $(1,\ 1)$ が 2 曲線の交点というのを見つけることです。