1

解答解説のページへ

座標空間において，1 辺の長さが 1 の立方体 OABC-DEFG をなす 8 つの頂点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ 0)$およびD$(0,\ 0,\ 1)$，E$(1,\ 0,\ 1)$，F$(1,\ 1,\ 1)$，G$(0,\ 1,\ 1)$をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$とおく。辺 DE 上に点 P$(s,\ 0,\ 1)$ $(0\leqq s\leqq 1)$，辺 CB 上に点Q$(t,\ 1,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 1)$をとり，3 点 O, P, Q を含む平面と直線 GF との交点を R とする。また四角形 OPRQ の面積を U とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$および$s, t$で表せ。

(2) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$s, t$で表せ。また，$U$を$s, t$で表せ。

(3) 点 R が辺 GF 上にあるとき，U の最大値，最小値を求めよ。またそのときの s，t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

多項式$P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$について，次の問いに答えよ。ただし，$n$ は 2 以上の整数とする。

(1)　$Q(t)=P(t+1)$ とおく。多項式$Q(t)$の定数項，t の係数およびt^2の係数は 0 であることを示せ。

(2)　$P(x)$は$(x-1)^3$で割り切れるが，$(x-1)^4$ では割り切れないことを示せ。

(3)　方程式$P(x)=0$の整数解は 1 および-1のみであることを示せ。

$\boxed{3}$　解答解説のページへ

平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを p，辺 BC の長さを q とし，$\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とおく。ただし $p>q$ とする。平行四辺形 ABCD の内部の点 P と 4 本の直線 AB，BC，CD，DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときの r の最大値を R とし，最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

(1)　平行四辺形 ABCD 内に L を図示せよ。

(2)　半径 R の円の中心が L 上を動くとき，円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。S を $p,\ q$ および θ で表せ。

(3)　平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2)で求めた S に対して $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S}{T}$ を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

半径がそれぞれ a, b の円を C_a，C_b とする。C_a 上に点 A, C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A, B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで，点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，自然数 m, n の最大公約数を $\gcd(m,\ n)$ で表せ。

(1)　a, b を自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，a, b を用いて表せ。

(2)　a, b を正の有理数とし，$a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$ とおく。ここで p, q は互いに素な自然数とし，s, t も互いに素な自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，p, q, s, t を用いて表せ。

(3)　a, b は互いに素な自然数とする。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ に対して，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

a は$-2<a<2$を満たす定数とし，関数$f(x)$を，$f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+a\sin x\cos x}$とする。

次の問いに答えよ。

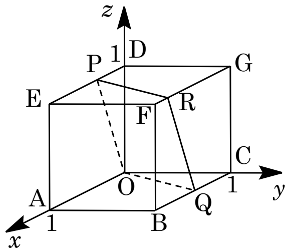
(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおいて，$f(x)$を t と a を用いて表せ。また，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$の最大値，最小値を求めよ。

(3)　$a=-1$ と $a=1$ の場合に，$u=\sin x-\cos x$ とおいて，置換積分法により定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　右図の 1 辺の長さが 1 の立方体 OABC-DEFG に対し，DE 上に $P(s,\ 0,\ 1)$ $(0\leqq s\leqq 1)$，辺 CB 上に $Q(t,\ 1,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ をとり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}=\vec{d}+s\vec{a}\cdots\cdots\cdots①$$
$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ}=\vec{c}+t\vec{a}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，k を実数として，$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GR}=\vec{c}+\vec{d}+k\vec{a}$ とすると，①②より，

$$\overrightarrow{OR}=(\overrightarrow{OQ}-t\vec{a})+(\overrightarrow{OP}-s\vec{a})+k\vec{a}=(k-t-s)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\cdots\cdots\cdots③$$

R は 3 点 O, P, Q を含む平面上にあるので，$k-t-s=0$ $(k=s+t)$ となり，

$$\overrightarrow{OR}=(s+t)\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}\cdots\cdots\cdots④$$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{d}=0$ であるので，

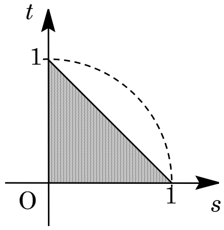
$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(s\vec{a}+\vec{d})\cdot(t\vec{a}+\vec{c})=st\cdot 1^2=st$$

③から $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ なので，四角形 OPRQ は平行四辺形であり，面積 U は,

$$U=2(\triangle OPQ)=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}=\sqrt{(s^2+1)(t^2+1)-(st)^2}$$
$$=\sqrt{s^2+t^2+1}$$

(3)　点 R が辺 GF 上にあるとき，④から $\overrightarrow{OR}=(s+t)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}$ と表せるので，

$$0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1,\ 0\leqq s+t\leqq 1$$



この不等式の表す領域を st 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

そして，この領域内の点で，原点からの距離の 2 乗 s^2+t^2 が最大になるのは $(s,\ t)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ のときで，このとき U は最大値 $\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$ をとる。

また，s^2+t^2 が最小になるのは $(s,\ t)=(0,\ 0)$ のときで，このとき U は最小値 $\sqrt{0+0+1}=1$ をとる。

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用に，領域と最大・最小のテーマを組み合わせた問題です。なお，(3)については 1 文字固定をして最大・最小を求める方法も考えられます。

2

問題のページへ

(1)　$P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1\ \ (n\geqq 2)$ に対して，

$$Q(t)=P(t+1)=(t+1)^{2n}-n(t+1)^{n+1}+n(t+1)^{n-1}-1$$

ここで，$Q(t)$ の定数項を a_0，t の係数を a_1 とおくと，

$$a_0=1^{2n}-n\cdot 1^{n+1}+n\cdot 1^{n-1}-1=1-n+n-1=0$$

$$a_1={}_{2n}\mathrm{C}_1\cdot 1^{2n-1}-n\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_1\cdot 1^n+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_1\cdot 1^{n-2}$$

$$=2n-n(n+1)+n(n-1)=2n-n^2-n+n^2-n=0$$

また，t^2 の係数を a_2 とおくと，$n\geqq 3$ のとき，

$$a_2={}_{2n}\mathrm{C}_2\cdot 1^{2n-2}-n\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_2\cdot 1^{n-1}+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_2\cdot 1^{n-3}$$

$$=n(2n-1)-\frac{1}{2}n^2(n+1)+\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$$

$$=2n^2-n-\frac{1}{2}(n^3+n^2)+\frac{1}{2}(n^3-3n^2+2n)=0$$

$n=2$ のとき，$Q(t)=(t+1)^4-2(t+1)^3+2(t+1)-1$ から，$a_2={}_4\mathrm{C}_2-2\cdot 3=0$

(2)　$Q(t)$ の t^3 の係数を a_3 とおくと，$n\geqq 4$ のとき，

$$a_3={}_{2n}\mathrm{C}_3\cdot 1^{2n-3}-n\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_3\cdot 1^{n-2}+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_3\cdot 1^{n-4}$$

$$=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n-2)-\frac{1}{6}n^2(n+1)(n-1)+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)\{4(2n-1)-n(n+1)+(n-2)(n-3)\}=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$$

$n=3$ のとき，$Q(t)=(t+1)^6-3(t+1)^4+3(t+1)^2-1$ から，

$$a_3={}_6\mathrm{C}_3-3\cdot{}_4\mathrm{C}_3=8$$

$n=2$ のとき，$a_3={}_4\mathrm{C}_3-2\cdot 1=2$ となり，$n\geqq 2$ において $a_3\neq 0$ であるので，

$$Q(t)=P(t+1)=a_{2n}t^{2n}+a_{2n-1}t^{2n-1}+\cdots+a_4t^4+a_3t^3$$

$x=t+1$ とおくと，$a_{2n}=1$，a_{2n-1}，$\cdots$，a_4 が実数，$a_3\neq 0$ として，

$$P(x)=a_{2n}(x-1)^{2n}+a_{2n-1}(x-1)^{2n-1}+\cdots+a_4(x-1)^4+a_3(x-1)^3$$

よって，$P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが，$(x-1)^4$ では割り切れない。

(3)　方程式 $P(x)=0$ の整数解は，$x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}=1$ から，

$$x(x^{2n-1}-nx^n+nx^{n-2})=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$(*)$を満たす整数 x は 1 の約数すなわち $x=\pm 1$ に限られる。

(2)より $P(1)=0$ となり，また $P(-1)=(-1)^{2n}-n(-1)^{n+1}+n(-1)^{n-1}-1$ から，

$$P(-1)=1-n(-1)^{n-1}+n(-1)^{n-1}-1=0$$

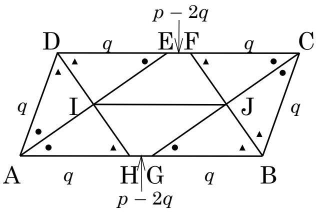
よって，$P(x)=0$ の整数解は 1 および -1 のみである。

［解　説］

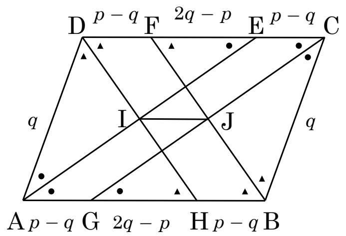
多項式を題材にした論証問題です。(1)から(2)へはスムーズですが，(3)は……。

3

問題のページへ



(1)　AB $= p$，BC $= q$ $(p > q)$ である平行四辺形 ABCD に対し, 4 つの内角の二等分線を, AE, BF, CG, DH とする。そして, AE と DH の交点を I, BF と CG の交点を J とおく。すると，$p \geqq 2q$ のときは右上図，$2q > p > q$ のときは右下図のような位置関係になる。



さて, 点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くとき, 直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。

(i)　点 P が台形 ABJI の内部または辺上を動くとき

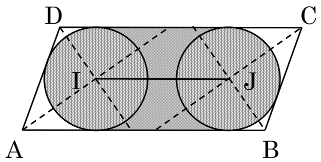
このとき, r は P と直線 AB との距離になり，r の最大値 R は線分 IJ 上の点と直線 AB の距離が対応する。

(ii)　点 P が△AID の内部または辺上を動くとき

このとき, r は P と直線 AD との距離となり, r の最大値 R は点 I と直線 AD の距離が対応する。

(i)(ii)より，対称性を考えると，最大値 R を与える点 P の軌跡 L は線分 IJ である。

(2)　半径 R の円の中心が L 上を動くとき，この円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。



すると，$\theta = \angle \mathrm{BAD}$ より $2R = q\sin\theta$ すなわち $R = \dfrac{1}{2}q\sin\theta$ となり，また IJ $= p - q$ から,

$$S = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot 2 + 2R \cdot \mathrm{IJ} = \frac{1}{4}\pi q^2 \sin^2\theta + (p-q)q\sin\theta$$

(3)　平行四辺形 ABCD の面積 T は，$T = pq\sin\theta$ となるので,

$$\lim_{\theta \to +0}\frac{S}{T} = \lim_{\theta \to +0}\left\{\frac{1}{4}\pi \cdot \frac{q^2\sin^2\theta}{pq\sin\theta} + \frac{(p-q)q\sin\theta}{pq\sin\theta}\right\} = \lim_{\theta \to +0}\left(\frac{1}{4}\pi \cdot \frac{q\sin\theta}{p} + \frac{p-q}{p}\right)$$

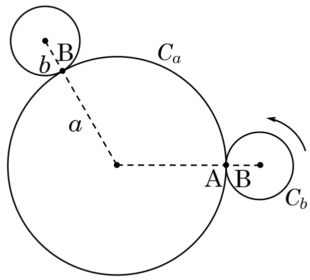
$$= \frac{p-q}{p}$$

［解 説］

図形と計量に極限の絡んだ問題です。(1)の設問が答えのみ，すなわち軌跡 L を図示するだけよければ素早くできるのですが，その根拠を丁寧に説明するのは面倒です。その 1 例を上に示しましたが，もっと詳しく書いた方がよかったかもしれません。というのは，(2)と(3)が付録のような感じですので。

4　問題のページへ

(1)　まず，半径が a の円 C_a 上に点 A，半径が b の円 C_b 上に点 B をとる。はじめに点 A と点 B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。そして，点 B が点 A に再び一致するとき，C_b は m 周期回転し，同時に C_a のまわりを n 回転したとすると，



$$2\pi b\cdot m = 2\pi a\cdot n\,,\ \ bm = an \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，a，b が自然数なので，$g = \gcd(a,\ b)$ として，$a = ga'$，$b = gb'$ とおくと，a' と b' は互いに素となり，①より，

$$gb'm = ga'n\,,\ \ b'm = a'n$$

すると，m は a' の倍数となり，その最小数は $m = a' = \dfrac{a}{g} = \dfrac{a}{\gcd(a,\ b)}$ である。

(2)　a, b が正の有理数のとき，既約分数で $a = \dfrac{p}{q}$，$b = \dfrac{s}{t}$ とおくと，①より，

$$\frac{s}{t}m = \frac{p}{q}n\,,\ \ qsm = ptn \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$g_1 = \gcd(p,\ s)$，$g_2 = \gcd(q,\ t)$ とおくと，

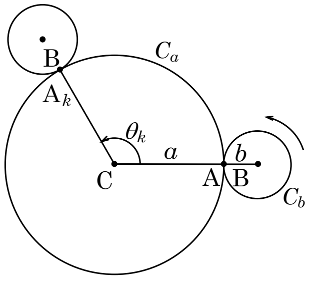
$$p = g_1p'\,,\ \ s = g_1s'\,,\ \ q = g_2q'\,,\ \ t = g_2t'$$

そして，p' と s' は互いに素，q' と t' は互いに素となり，②より，

$$g_1g_2q's'm = g_1g_2p't'n\,,\ \ q's'm = p't'n$$

すると，p' と q' も互いに素，s' と t' も互いに素なので，m は $p't'$ の倍数となり，その最小数は $m = p't' = \dfrac{pt}{g_1g_2} = \dfrac{pt}{\gcd(p,\ s)\cdot\gcd(q,\ t)}$ である。

(3)　a, b が互いに素な自然数の場合，点 B が点 A に再び一致するとき，(1)より，C_b は a 周期回転し，同時に C_a のまわりを b 回転している。



ここで，$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ a$ として，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とし，CA から測った CA_k への角を θ_k とおくと，

$$2\pi b\cdot k = a\theta_k\,,\ \ \theta_k = 2\pi\cdot\frac{bk}{a}$$

さて，$bk\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ a)$ を a で割った商を q_k，余りを r_k とおくと，$bk = aq_k + r_k\ (0 \leqq r_k \leqq a-1)$ となり，

$$\theta_k = 2\pi\cdot\frac{aq_k + r_k}{a} = 2\pi q_k + 2\pi\cdot\frac{r_k}{a} \cdots\cdots\cdots ③$$

このとき，$1 \leqq i < j \leqq a$ において，$r_i = r_j$ と仮定すると，

$$b(j-i) = a(q_j - q_i) + (r_k - r_j) = a(q_j - q_i)$$

すると，$j-i$ は a の倍数となるが，$1 \leqq j-i \leqq a-1$ より不適である。

よって，$1 \leqq i < j \leqq a$ のとき，$r_i \neq r_j$ となり，これより，

$$\{r_1,\ r_1,\ \cdots,\ r_a\} = \{0,\ 1,\ \cdots,\ a-1\}$$

したがって，③から，$\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分する。

［解 説］

図形の絡んだ整数問題です。題材は有名な外サイクロイドです。ただ, (3)の後半の余りでの評価は, 経験がないと難しいでしょう。

5　　　　問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+a\sin x\cos x}\ (-2<a<2)$ に対して，$t=\sin x+\cos x$ とおくと，

$$t^2=1+2\sin x\cos x\ ,\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1)$$

これより，$f(x)=\dfrac{t}{1+\dfrac{a}{2}(t^2-1)}=\dfrac{2t}{at^2-a+2}$ となる。

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，t のとりうる値の範囲は，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である。

(2)　$f(x)=g(t)$ とおくと，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ において，$g(t)=\dfrac{2t}{at^2-a+2}$ である。

ここで，$at^2-a+2=a(t^2-1)+2$ であるので，$-2<a<2$，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ から，$a(t^2-1)+2>-2+2=0$ となり，

$$g'(t)=\frac{2(at^2-a+2)-2t\cdot 2at}{(at^2-a+2)^2}=\frac{-2(at^2+a-2)}{(at^2-a+2)^2}$$

(i)　$-2<a\leqq 0$ のとき

$a-2<0$ なので，$at^2+a-2<0$ となり，$g'(t)>0$ である。

これより，$g(t)$ の最大値は $g(\sqrt{2})=\dfrac{2\sqrt{2}}{2a-a+2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{a+2}$ となり，最小値は $g(-\sqrt{2})=\dfrac{-2\sqrt{2}}{2a-a+2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{a+2}$ である。

(ii)　$0<a<2$ のとき

$a-2<0$ なので，$at^2+a-2=a\left(t+\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\right)\left(t-\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\right)$ と変形でき，ここで $\alpha=\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$ とおくと，

(ii-i)　$\alpha\geqq\sqrt{2}\ \left(0<a\leqq\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

このとき，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ で $at^2+a-2\leqq 0$ から，$g'(t)\geqq 0$ となり，(i)と同様に，$g(t)$ の最大値は $g(\sqrt{2})=\dfrac{2\sqrt{2}}{a+2}$，最小値は $g(-\sqrt{2})=-\dfrac{2\sqrt{2}}{a+2}$ である。

(ii-ii)　$0<\alpha<\sqrt{2}\ \left(\dfrac{2}{3}<a<2\right)$ のとき

$g(-t)=-g(t)$ から $g(t)$ は奇関数なので，$0\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $g(t)$ の増減を調べると，右表のようになり，$g(t)$ の最大値は，

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

$$g(\alpha)=\frac{2\alpha}{(2-a)-a+2}=\frac{2}{4-2a}\sqrt{\frac{2-a}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a(2-a)}}$$

また，$g(t)$ の最小値は，対称性から，$g(-\alpha)=-\dfrac{1}{\sqrt{a(2-a)}}$ である。

(i)(ii)をまとめると，$f(x)$ の最大値，最小値は，

・$-2 < a \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき　最大値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{a+2}$，最小値 $-\dfrac{2\sqrt{2}}{a+2}$

・$\dfrac{2}{3} < a < 2$ のとき　最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{a(2-a)}}$，最小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{a(2-a)}}$

(3)　$I_a = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{1 + a\sin x\cos x}dx$ に対して，$u = \sin x - \cos x$ とおくと，

$$u^2 = 1 - 2\sin x\cos x\,,\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}(1-u^2)$$

そして，$u = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ から，$x = 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき $u = -1 \to 1$ となり，また $du = (\cos x + \sin x)dx$ から，

$$I_a = \int_{-1}^{1} \frac{2}{2 + a(1-u^2)}du = 4\int_0^1 \frac{1}{2 + a(1-u^2)}du$$

さて，$a = -1$ のとき，$I_{-1} = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du$ となり，$u = \tan\varphi \left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $du = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi$，$u = 0 \to 1$ のとき $\varphi = 0 \to \dfrac{\pi}{4}$ なので，

$$I_{-1} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\varphi + 1}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi$$

また，$a = 1$ のとき，$I_1 = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3-u^2}du$ となり，

$$I_1 = 4\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{3}+u)(\sqrt{3}-u)}du = 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}+u} + \frac{1}{\sqrt{3}-u}\right)du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\log|\sqrt{3}+u| - \log|\sqrt{3}-u|\Big]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\log\left|\frac{\sqrt{3}+u}{\sqrt{3}-u}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\log\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})$$

［解 説］

微分と最大・最小および定積分の計算についての問題です。(2)がメインになりますが，a と t の両方に範囲の制限があるため，その処理は複雑です。また，(3)は独立した設問で，これは標準的な計算です。