

1

解答解説のページへ

正四面体 $OABC$ において三角形 ABC の重心を D ，線分 AB を $2:1$ に内分する点を E ，線分 AC を $5:2$ に外分する点を F とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \overrightarrow{OD} を \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} を用いて表せ。
- (2) ベクトル \overrightarrow{OE} および \overrightarrow{OF} を \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} を用いて表せ。
- (3) 点 G は点 E を通り \overrightarrow{OA} に平行な直線上にある。点 H は点 F を通り \overrightarrow{OB} に平行な直線上にある。3 点 D ， G ， H が一直線上にあるとき，ベクトル \overrightarrow{OG} および \overrightarrow{OH} を \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた \overrightarrow{OG} ， \overrightarrow{OH} に対して， $\frac{|\overrightarrow{OH}|^2}{|\overrightarrow{OG}|^2}$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の 2 点 $A(0, -1)$, $B(1, 2)$ を通る直線を l とする。また, 中心 $(3, -2)$, 半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

- (1) l の方程式を求めよ。
- (2) l と C は共有点をもたないことを示せ。
- (3) 点 P が円 C 上を動くとき, 三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。 T はどのような図形になるか答えよ。
- (4) (3) で求めた図形 T 上の点 (x, y) に対して $\sqrt{x^2 + y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上に正五角形 ABCDE があり、頂点 A, B, C, D, E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き、この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば、 $n = 2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり、 $n = 6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

- (1) さいころを 2 回投げて出た目の積で n を与えるとき、点 P が頂点 A の位置にある確率および点 P が頂点 B の位置にある確率をそれぞれ求めよ。
- (2) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき、点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。
- (3) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき、点 P が頂点 B の位置にある確率を b_k とする。 b_{k+1} を b_k を用いて表せ。
- (4) (3) で与えた b_k に対して、 $f_k = 6^k b_k$ とおく。数列 $\{f_k\}$ と $\{b_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

4

解答解説のページへ

実数 a と b に対して、関数 $f(x)$ を $f(x) = ax^2 + bx + \cos x + 2\cos \frac{x}{2}$ と定める。次の問いに答えよ。

(1) $\int_0^{2\pi} x \cos x dx$, $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$ の値を求めよ。

(2) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$, $\int_0^{2\pi} x^2 \sin x dx$ の値を求めよ。

(3) $f(x)$ が $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx = 4 + \pi$, $\int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx = \frac{4}{3}(4 + \pi)$ を満たすとき、

a と b の値を求めよ。

(4) (3)で求めた a と b で定まる $f(x)$ に対して、 $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

複素数平面上の原点を中心とする単位円周上の4点 z_1, z_2, z_3, z_4 は

$$\arg \frac{z_2}{z_1} = \theta_1 > 0, \quad \arg \frac{z_3}{z_2} = \theta_2 > 0, \quad \arg \frac{z_4}{z_3} = \theta_3 > 0, \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 2\pi$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $|z_2 - z_1|$ を θ_1 を用いて表せ。
- (2) $|z_3 - z_1|, |z_4 - z_1|$ を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を用いて表せ。
- (3) $\frac{|z_4 - z_1||z_2 - z_1| + |z_3 - z_2||z_4 - z_3|}{|z_2 - z_1||z_3 - z_2| + |z_4 - z_3||z_4 - z_1|} = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_4 - z_2|}$ を示せ。

1

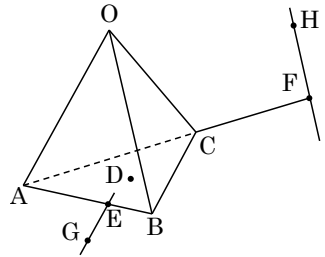
問題のページへ

(1) 正四面体 $OABC$ に対し, $\triangle ABC$ の重心を D とすると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

(2) 線分 AB を $2:1$ に内分する点を E , 線分 AC を $5:2$ に外分する点を F とすると,

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OF} = \frac{-2\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OC}}{5-2} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{c}$$



(3) 点 G は点 E を通り \overrightarrow{OA} に平行な直線上, 点 H は点 F を通り \overrightarrow{OB} に平行な直線上にあるので, s, t を実数として,

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OE} + s\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{3} + s\right)\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OF} + t\overrightarrow{OB} = -\frac{2}{3}\vec{a} + t\vec{b} + \frac{5}{3}\vec{c}$$

ここで, 3 点 D, G, H が一直線上にあるとき, $\overrightarrow{DH} = k\overrightarrow{DG}$ (k は実数) より,

$$\begin{aligned}-\frac{2}{3}\vec{a} + t\vec{b} + \frac{5}{3}\vec{c} - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) &= k\left\{\left(\frac{1}{3} + s\right)\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)\right\} \\ -\vec{a} + \left(t - \frac{1}{3}\right)\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{c} &= k\left(s\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right)\end{aligned}$$

すると, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立なので,

$$-1 = ks \dots\dots\dots \textcircled{1}, \quad t - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}k \dots\dots\dots \textcircled{2}, \quad \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}k \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

③より $k = -4$ となり, ①より $s = \frac{1}{4}$, ②より $t = -1$ なので,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{7}{12}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OH} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} + \frac{5}{3}\vec{c}$$

(4) (3)より, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{12}(7\vec{a} + 8\vec{b})$, $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(-2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c})$

ここで, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = l$ とすると, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = l^2 \cos 60^\circ = \frac{l^2}{2}$ となり,

$$|7\vec{a} + 8\vec{b}|^2 = 49l^2 + 112 \cdot \frac{1}{2}l^2 + 64l^2 = 169l^2$$

$$|-2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}|^2 = 4l^2 + 9l^2 + 25l^2 + 12 \cdot \frac{1}{2}l^2 - 30 \cdot \frac{1}{2}l^2 - 20 \cdot \frac{1}{2}l^2 = 19l^2$$

よって, $|\overrightarrow{OG}|^2 = \frac{169l^2}{144}$, $|\overrightarrow{OH}|^2 = \frac{19l^2}{9}$ となり, $\frac{|\overrightarrow{OH}|^2}{|\overrightarrow{OG}|^2} = \frac{19l^2}{9} \cdot \frac{144}{169l^2} = \frac{304}{169}$

[解説]

空間ベクトルの四面体への応用についての基本題です。

2

- (1) 2点
- $A(0, -1)$
- ,
- $B(1, 2)$
- を通る直線
- l
- の方程式は,

$$y = \frac{2 - (-1)}{1 - 0}x - 1, \quad y = 3x - 1$$

- (2) 円
- C
- の中心
- $(3, -2)$
- と
- $l: 3x - y - 1 = 0$
- の距離
- d
- は,

$$d = \frac{|3 \cdot 3 - (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

すると, d は C の半径 3 より大なので, l と C は共有点をもたない。

- (3) 円
- $C: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$
- 上を動く点
- $P(s, t)$
- について,

$$(s-3)^2 + (t+2)^2 = 9 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで, $\triangle ABP$ の重心 $G(x, y)$ の軌跡を T とすると,

$$x = \frac{1}{3}(0+1+s) = \frac{1}{3}(s+1) \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad y = \frac{1}{3}(-1+2+t) = \frac{1}{3}(t+1) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②より $s = 3x - 1$, ③より $t = 3y - 1$ となり, ①に代入すると,

$$(3x - 1 - 3)^2 + (3y - 1 + 2)^2 = 9, \quad \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

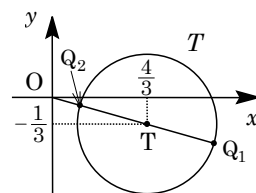
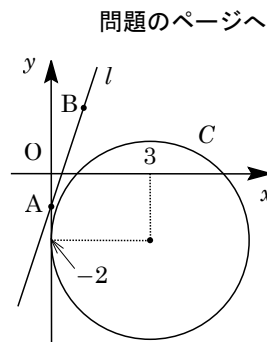
よって, 軌跡 T は, 中心 $T\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ で半径 1 の円である。

- (4) 軌跡
- T
- 上の点
- $Q(x, y)$
- に対して,
- $OQ = \sqrt{x^2 + y^2}$
- となり,

$$OT = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

T の半径 1 より, OQ の最大値は $OQ_1 = OT + 1 = \frac{\sqrt{17}}{3} + 1$,

最小値は $OQ_2 = OT - 1 = \frac{\sqrt{17}}{3} - 1$ である。



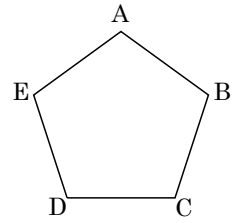
[解説]

円と直線を題材にした軌跡の問題です。教科書の例題に載るような典型題です。

3

問題のページへ

- (1) 正五角形 ABCDE に対して、点 P をまず頂点 A の位置に置き、この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。



さいころを 2 回投げて出た目の積で n を与えるとき、さいころの目とその積 n の関係をまとめると、右下表のようになる。

すると、点 P が頂点 A の位置にあるのは、 n が 5 の倍数、すなわち $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30$

より、その確率は、

$$\frac{2+2+2+2+1+2}{6^2} = \frac{11}{36}$$

また、点 P が頂点 B の位置にあるのは、 n を 5 で割った余りが 1、すなわち $n = 1, 6, 16, 36$ より、その確率は、

$$\frac{1+4+1+1}{6^2} = \frac{7}{36}$$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

- (2) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき、点 P が頂点 A, B, C, D, E の位置にある確率をそれぞれ a_k, b_k, c_k, d_k, e_k とおく。

すると、点 P が頂点 A の位置にあるのは、 k 回のうち少なくとも 1 回は 5 が出るときなので、その確率 a_k は、 $a_k = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$ である。

- (3) (2)と同様に、点 P が頂点 B の位置にある確率 b_k に対して、

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \frac{2}{6}b_k + \frac{1}{6}c_k + \frac{1}{6}d_k + \frac{1}{6}e_k = \frac{1}{3}b_k + \frac{1}{6}(1 - a_k - b_k) \\ &= \frac{1}{6}b_k + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right\} = \frac{1}{6}b_k + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k \dots\dots ① \end{aligned}$$

- (4) $f_k = 6^k b_k$ とおくと $b_k = \frac{f_k}{6^k}$ となり、①より、

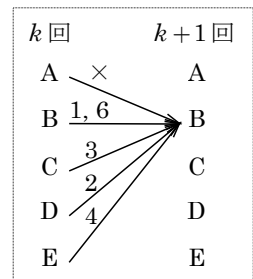
$$\frac{f_{k+1}}{6^{k+1}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{f_k}{6^k} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^k, \quad f_{k+1} = f_k + 5^k$$

ここで、 $b_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ から $f_1 = 6^1 \cdot \frac{1}{3} = 2$ となり、 $k \geq 2$ において、

$$f_k = f_1 + \sum_{j=1}^{k-1} 5^j = 2 + \frac{5(5^{k-1} - 1)}{5 - 1} = \frac{5^k}{4} + \frac{3}{4} \dots\dots ②$$

なお、②に $k=1$ をあてはめると、 $f_1 = \frac{5^1}{4} + \frac{3}{4} = 2$ となり成り立っている。

これより、 $b_k = \frac{f_k}{6^k} = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^k + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^k$ である。



[解説]

確率と漸化式の標準的な問題です。(1)は直接的に数え上げましたが、5 で割った余りに注目して処理すると記述量が少なくなり、(2)以降とのつながりもよくなります。

4

問題のページへ

$$(1) \int_0^{2\pi} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx = -[x \cos x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x dx = -2\pi$$

$$(2) \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = [x^2 \sin x]_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx = -2(-2\pi) = 4\pi$$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x dx = -[x^2 \cos x]_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} x \cos x dx = -4\pi^2 \cdot 1 = -4\pi^2$$

(3) $f(x) = ax^2 + bx + \cos x + 2\cos \frac{x}{2}$ に対して, (1)(2)の結果を利用すると, まず,

$$\begin{aligned} 4 + \pi &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx = \int_0^{2\pi} (ax^2 + bx + \cos x + 2\cos \frac{x}{2}) \cos x dx \\ &= 4\pi a + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + \int_0^{2\pi} (\cos \frac{3}{2}x + \cos \frac{x}{2}) dx \\ &= 4\pi a + \frac{1}{2} [x + \frac{1}{2} \sin 2x]_0^{2\pi} + [\frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}x + 2 \sin \frac{x}{2}]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi a + \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 4\pi a + \pi \end{aligned}$$

これより, $4 = 4\pi a$ から $a = \frac{1}{\pi}$ となり, 次に,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(4 + \pi) &= \int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx = \int_0^{2\pi} (ax^2 + bx + \cos x + 2\cos \frac{x}{2}) \sin x dx \\ &= -4\pi^2 a - 2\pi b + \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{2} dx + \int_0^{2\pi} (\sin \frac{3}{2}x + \sin \frac{x}{2}) dx \\ &= -4\pi - 2\pi b - \frac{1}{2} [\frac{1}{2} \cos 2x]_0^{2\pi} - [\frac{2}{3} \cos \frac{3}{2}x + 2 \cos \frac{x}{2}]_0^{2\pi} \\ &= -4\pi - 2\pi b - \frac{2}{3}(-1-1) - 2(-1-1) = -2\pi b - 4\pi + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

これより, $\frac{4}{3}\pi = -2\pi b - 4\pi$ から $b = -\frac{8}{3}$ となる。

(4) (3)より, $f(x) = \frac{1}{\pi}x^2 - \frac{8}{3}x + \cos x + 2\cos \frac{x}{2}$ となり,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}x^2 - \frac{8}{3}x + 2\cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{\pi}(x - \frac{4}{3}\pi)^2 + 2(\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2})^2 - \frac{16}{9}\pi - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

すると, $\frac{1}{\pi}(x - \frac{4}{3}\pi)^2 \geq 0$, $2(\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2})^2 \geq 0$ から, $f(x) \geq -\frac{16}{9}\pi - \frac{3}{2}$

等号は $x - \frac{4}{3}\pi = 0$ かつ $\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$ のとき, すなわち $x = \frac{4}{3}\pi$ かつ $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ よ

り $x = \frac{4}{3}\pi$ のときに成立する。

以上より, $f(x)$ は $x = \frac{4}{3}\pi$ のとき最小値 $-\frac{16}{9}\pi - \frac{3}{2}$ をとる。

[解説]

定積分の計算問題です。三角関数の周期性を利用して計算を進めています。ただ、(4)では通常微分の利用ではうまくいきません。何か仕掛けがあると予想し、平方完成で処理しました。この方法への切替がやや難です。

5

問題のページへ

(1) 複素数平面上の原点を中心とする単位円周上にある 4 点

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ に対し, } \arg \frac{z_2}{z_1} = \theta_1 > 0, \arg \frac{z_3}{z_2} = \theta_2 > 0,$$

$$\arg \frac{z_4}{z_3} = \theta_3 > 0, \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 2\pi \text{ とする.}$$

3 点 O, z_1, z_2 を頂点とする三角形に余弦定理を適用すると, $0 < \theta_1 < \pi$ のとき,

$$|z_2 - z_1|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1^2 \cdot \cos \theta_1 = 2 - 2 \cos \theta_1$$

$$\text{また, } \pi < \theta_1 < 2\pi \text{ のとき, } |z_2 - z_1|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1^2 \cdot \cos(2\pi - \theta_1) = 2 - 2 \cos \theta_1$$

さらに, $\theta_1 = \pi$ のとき, $|z_2 - z_1|^2 = 2^2 = 2 - 2 \cos \pi$ となり, いずれのときも,

$$|z_2 - z_1|^2 = 2 - 2 \cos \theta_1$$

ここで, $0 < \theta_1 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 2\pi$ より, $0 < \frac{\theta_1}{2} < \pi$ となるので,

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{2 - 2 \cos \theta_1} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} = 2 \left| \sin \frac{\theta_1}{2} \right| = 2 \sin \frac{\theta_1}{2}$$

(2) (1)と同様に考えると, $0 < \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} < \pi$, $0 < \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2} < \pi$ より,

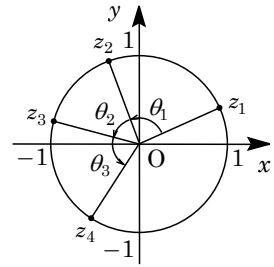
$$|z_3 - z_1| = 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad |z_4 - z_1| = 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2}$$

(3) $|z_3 - z_2| = 2 \sin \frac{\theta_2}{2}$, $|z_4 - z_2| = 2 \sin \frac{\theta_2 + \theta_3}{2}$, $|z_4 - z_3| = 2 \sin \frac{\theta_3}{2}$ となり,

$$\begin{aligned} & |z_4 - z_1| |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| |z_4 - z_3| = 4 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} + 4 \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2} \\ &= -2 \left(\cos \frac{2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2} - \cos \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \right) - 2 \left(\cos \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} - \cos \frac{\theta_2 - \theta_3}{2} \right) \\ &= -2 \left(\cos \frac{2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2} - \cos \frac{\theta_2 - \theta_3}{2} \right) = 4 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |z_2 - z_1| |z_3 - z_2| + |z_4 - z_3| |z_4 - z_1| = 4 \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} + 4 \sin \frac{\theta_3}{2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2} \\ &= -2 \left(\cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) - 2 \left(\cos \frac{\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3}{2} - \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \\ &= -2 \left(\cos \frac{\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3}{2} - \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) = 4 \sin \frac{\theta_1 + \theta_3}{2} \sin \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{以上より, } \frac{|z_4 - z_1| |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| |z_4 - z_3|}{|z_2 - z_1| |z_3 - z_2| + |z_4 - z_3| |z_4 - z_1|} = \frac{\sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}{\sin \frac{\theta_2 + \theta_3}{2}} = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_4 - z_2|} \text{ である.}$$



[解説]

複素数平面についての問題ですが, 内容的には三角関数の式変形です。