

1

解答解説のページへ

座標平面の原点を O とし、2 点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{3}{4}\right)$ をとり、単位円周上に点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ をとる。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 四角形 $OAPB$ の面積 S を θ を用いて表せ。
- (3) $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12}$ のとき、 S の最大値と最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標区間の原点を O とし、3 点 $A(2, 2, -2)$, $B(2, -2, 2)$, $C(-2, 2, 2)$ をとる。線分 AB を $3:1$ に内分する点を D , 線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 2 点 D, E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし、 \overrightarrow{OF} と \overrightarrow{BC} のなす角 θ が $\cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき、

点 F の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

式 A, B, C を次のように定める。

$$A = y^2 - 3x^2y + 11xy + 4y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5$$

$$B = y^2 + x^2y - 5xy + 4y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5, \quad C = y + x - 1$$

次の問いに答えよ。

- (1) 式 A, B, C を y の整式とみて、 A, B を C で割ったときの商をそれぞれ求めよ。
- (2) 不等式 $\log A > \log(-B)$ が表す領域を xy 平面上に図示せよ。

4

解答解説のページへ

曲線 C を $y = x^2 e^x$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の概形をかけ。
- (2) $\int x e^x dx$, $\int x^2 e^x dx$ をそれぞれ求めよ。
- (3) 点 $(t, 0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど 2 本存在するような t の値をすべて求めよ。
- (4) (3) で求めた t のうち $-1 < t < 0$ を満たすものを T とする。点 $(T, 0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

5

解答解説のページへ

複素数 z に対して、その共役複素数を \bar{z} とし、 i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。 $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha}$

ただし、 α は複素数とする。

(2) 以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\bar{z} + (1-i+\bar{\beta})z + (1+i+\beta)\bar{z} = \beta$$

(3) $|\beta| \leq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき、 $|z|$ の最大値を求めよ。また、そのときの β, z を求めよ。

$$z\bar{z} + (1-i+\bar{\beta})z + (1+i+\beta)\bar{z} = \beta$$

1

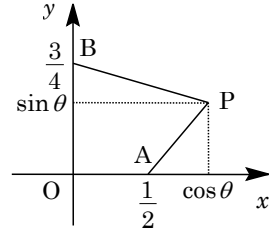
問題のページへ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\
 \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\
 \sin \frac{5\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\
 \cos \frac{5\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

(2) 点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{3}{4}\right)$, $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) に

対して, 四角形 OAPB の面積 S は,

$$\begin{aligned}
 S &= \triangle OAP + \triangle OBP = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cos\theta \\
 &= \frac{1}{4} \sin\theta + \frac{3}{8} \cos\theta \cdots \cdots (*)
 \end{aligned}$$



(3) $\vec{a} = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}(3, 2)$, $\vec{p} = (\cos\theta, \sin\theta)$ おくと, (*) から,

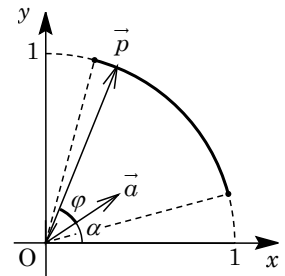
$$S = \frac{3}{8} \cos\theta + \frac{1}{4} \sin\theta = \vec{a} \cdot \vec{p} = |\vec{a}| |\vec{p}| \cos\varphi \quad (\varphi \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{p} \text{ のなす角})$$

すると, $|\vec{a}|$, $|\vec{p}|$ は一定なので, S が最大となるのは $\cos\varphi$ が最大すなわち φ が最小のとき, また S が最小となるのは $\cos\varphi$ が最小すなわち φ が最大のときに対応する。

ここで, \vec{a} と x 軸の正の部分とのなす角を α とおくと,

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

そして, $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12}$ に注意すると,



(i) φ が最小となるとき $\theta = \alpha$ より, S の最大値は,

$$S = \frac{3}{8} \cos\alpha + \frac{1}{4} \sin\alpha = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{13}{8\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{8}$$

(ii) φ が最大となるとき $\theta = \frac{5\pi}{12}$ より, S の最小値は,

$$S = \frac{3}{8} \cos \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{6} - \sqrt{2}}{32}$$

[解説]

基本的な三角関数の図形への応用問題です。(3)は \sin での合成という方法もありますが, 不等式の処理が面倒なので, 内積を利用した図形的な解法を採りました。

2

問題のページへ

(1) 点 A(2, 2, -2), B(2, -2, 2) に対し, 線分 AB を 3:1 に内分する点 D の座標は,

$$\left(\frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 2}{3+1}, \frac{3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2}{3+1}, \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)}{3+1} \right) = (2, -1, 1)$$

また, 点 C(-2, 2, 2) に対し, 線分 AC を 3:1 に外分する点 E の座標は,

$$\left(\frac{3 \cdot (-2) - 1 \cdot 2}{3-1}, \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 2}{3-1}, \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)}{3-1} \right) = (-4, 2, 4)$$

(2) 直線 DE 上の点 F は, t を実数として, $\overrightarrow{OF} = (1-t)\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE}$ と表せ,

$$\overrightarrow{OF} = (1-t)(2, -1, 1) + t(-4, 2, 4) = (-6t+2, 3t-1, 3t+1)$$

これより, $|\overrightarrow{OF}| = \sqrt{(-6t+2)^2 + (3t-1)^2 + (3t+1)^2} = \sqrt{6(9t^2 - 4t + 1)}$ また, $\overrightarrow{BC} = (-4, 4, 0)$ より, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ さて, \overrightarrow{OF} と \overrightarrow{BC} のなす角 θ が $\cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ より, $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{OF}| |\overrightarrow{BC}| \cdot \frac{3\sqrt{7}}{14}$

$$-4(-6t+2) + 4(3t-1) = \sqrt{6(9t^2 - 4t + 1)} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{14}$$

$$36t - 12 = \frac{12}{7} \sqrt{21(9t^2 - 4t + 1)}, \quad 7(3t - 1) = \sqrt{21(9t^2 - 4t + 1)}$$

ここで, $3t - 1 \geq 0$ ($t \geq \frac{1}{3}$) のもとで, 両辺 2 乗すると,

$$49(3t - 1)^2 = 21(9t^2 - 4t + 1), \quad 18t^2 - 15t + 2 = 0, \quad (3t - 2)(6t - 1) = 0$$

 $t \geq \frac{1}{3}$ から $t = \frac{2}{3}$ となり, $\overrightarrow{OF} = (-2, 1, 3)$ から F(-2, 1, 3) である。

[解説]

空間ベクトルについての基本題です。(2)は, 普通に成分表示で計算しましたが, やや計算が面倒です。

3

問題のページへ

(1) $A = y^2 - 3x^2y + 11xy + 4y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5$ を $C = y + x - 1$ で割ると、

$$A = C(y - 3x^2 + 10x + 5)$$

また、 $B = y^2 + x^2y - 5xy + 4y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5$ を $C = y + x - 1$ で割ると、

$$B = C(y + x^2 - 6x + 5)$$

(2) 不等式 $\log A > \log(-B)$ は、 $A > 0$ かつ $-B > 0$ かつ $A > -B$ と同値である。そして、 $-B > 0$ かつ $A > -B$ から、 $A > 0$ は成り立つので、まとめると、

$$-B > 0 \text{ かつ } A > -B \Leftrightarrow B < 0 \text{ かつ } A + B > 0$$

すると、(1)の結果より、 $B = C(y + x^2 - 6x + 5) < 0$ となり、

$$(y + x - 1)(y + x^2 - 6x + 5) < 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $A + B = C\{(y - 3x^2 + 10x + 5) + (y + x^2 - 6x + 5)\} > 0$ から、

$$(y + x - 1)(y - x^2 + 2x + 5) > 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、領域①かつ②の境界線は、 $y + x - 1 = 0$ ($y = -x + 1$) $\cdots \cdots \textcircled{3}$

$$y + x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ (} y = -x^2 + 6x - 5 = -(x - 3)^2 + 4 \text{)} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$y - x^2 + 2x + 5 = 0 \text{ (} y = x^2 - 2x - 5 = (x - 1)^2 - 6 \text{)} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

③④から $-x + 1 = -x^2 + 6x - 5$ となり、 $x^2 - 7x + 6 = 0$ 、 $(x - 1)(x - 6) = 0$

$$(x, y) = (1, 0), (6, -5)$$

③⑤から $-x + 1 = x^2 - 2x - 5$ となり、 $x^2 - x - 6 = 0$ 、 $(x + 2)(x - 3) = 0$

$$(x, y) = (-2, 3), (3, -2)$$

④⑤から $-x^2 + 6x - 5 = x^2 - 2x - 5$ となり、 $2x^2 - 8x = 0$ 、 $2x(x - 4) = 0$

$$(x, y) = (0, -5), (4, 3)$$

(i) $y + x - 1 > 0$ ($y > -x + 1$) のとき ①②より、

$$y + x^2 - 6x + 5 < 0 \text{ (} y < -(x - 3)^2 + 4 \text{)}$$

$$y - x^2 + 2x + 5 > 0 \text{ (} y > (x - 1)^2 - 6 \text{)}$$

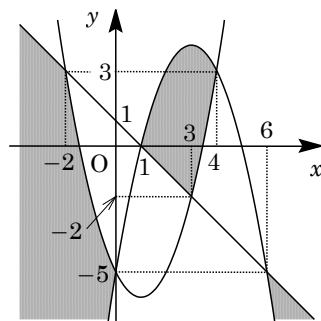
(ii) $y + x - 1 < 0$ ($y < -x + 1$) のとき ①②より、

$$y + x^2 - 6x + 5 > 0 \text{ (} y > -(x - 3)^2 + 4 \text{)}$$

$$y - x^2 + 2x + 5 < 0 \text{ (} y < (x - 1)^2 - 6 \text{)}$$

(i)(ii)より、①かつ②の領域は右図の網点部となる。

ただし、境界は領域に含まない。



[解説]

整式の除法と領域の融合問題です。基本的な内容ですが、図示するには時間がかかります。必要になります。

4

問題のページへ

(1) 曲線 $C: y = x^2e^x$ に対して,

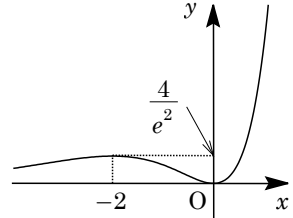
$$y' = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$$

すると, y の増減は右表のようになり,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$$

x	...	-2	...	0	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗

これより, 曲線 C の概形は右図の通りである。



(2) A, B を積分定数として,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + A$$

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2 \int xe^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + B$$

(3) 曲線 C 上の点 (p, p^2e^p) における接線の方程式は,

$$y - p^2e^p = p(p+2)e^p(x-p) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①が点 $(t, 0)$ を通ることより, $-p^2e^p = p(p+2)e^p(t-p)$ となり,

$$-p^2 = p(p+2)(t-p), \quad p\{p^2 - (t-1)p - 2t\} = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$p = 0 \quad \text{または} \quad p^2 - (t-1)p - 2t = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて, 接線が 2 本存在する条件は, ②の実数解が 2 個であることに対応するので,

(i) ③が $p \neq 0$ の重解をもつとき

$$D = (t-1)^2 + 8t = 0 \text{ から } t^2 + 6t + 1 = 0 \text{ となり, } t = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

なお, このいずれの値の場合も $p = \frac{t-1}{2} \neq 0$ である。

(ii) ③が $p = 0$ と $p \neq 0$ の実数解をもつとき

$$-2t = 0 \text{ から } t = 0 \text{ となり, このとき③は } p^2 + p = 0 \text{ から, } p = 0, -1$$

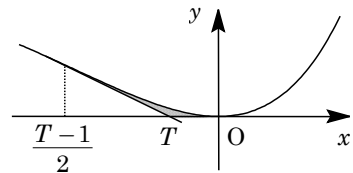
これより, 条件に適する。

(i)(ii)より, 求める t の値は, $t = 0, -3 \pm 2\sqrt{2}$ である。

(4) (3)の結果で $-1 < t < 0$ を満たすものを T とすると,

$T = -3 + 2\sqrt{2}$ となり, このとき, 接点は $p = 0$ と

$$p = \frac{T-1}{2} = -2 + \sqrt{2} \text{ である。}$$



すると, 点 $(T, 0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲

まれる部分の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2+\sqrt{2}}^0 x^2e^x dx - \frac{1}{2}\{(-3+2\sqrt{2}) - (-2+\sqrt{2})\}(-2+\sqrt{2})^2e^{-2+\sqrt{2}} \\ &= [(x^2 - 2x + 2)e^x]_{-2+\sqrt{2}}^0 - \frac{1}{2}(-1+\sqrt{2}) \cdot 2(3-2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} \\ &= 2 - (12 - 6\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} - (-7 + 5\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} = 2 - (5 - \sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

[解説]

微積分の総合問題です。(4)の積分計算がやや難です。なお, (3)では記述量を考え, 複接線の存在については触れていません。少し気になるのですが。

5

問題のページへ

- (1) $\bar{z}\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} = (z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) = (z + \alpha)\overline{(z + \alpha)} = |z + \alpha|^2$
 (2) $\bar{z}\bar{z} + (1 - i + \beta)z + (1 + i + \beta)\bar{z} = \beta \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対し、 $\alpha = 1 + i + \beta$ とおくと、
 $\bar{z}\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = \alpha - 1 - i$ 、 $(z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) = \alpha\bar{\alpha} + \alpha - 1 - i$
 よって、 $|z + \alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha} + \alpha - 1 - i \cdots \cdots \textcircled{2}$ となり、 $\textcircled{1}$ を満たす z が存在する条件は、
 $\alpha\bar{\alpha} + \alpha - 1 - i \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$

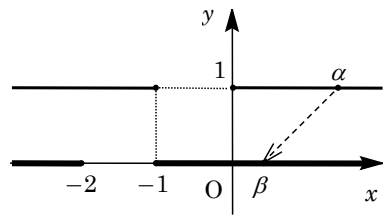
ここで、 $\alpha = x + yi$ とおくと、 $\textcircled{3}$ より、 $x^2 + y^2 + x + yi - 1 - i \geq 0$ となり、

$$x^2 + y^2 + x - 1 + (y - 1)i \geq 0$$

これより、 $x^2 + y^2 + x - 1 \geq 0$ かつ $y - 1 = 0$ となり、

$$x^2 + x \geq 0 \quad \text{かつ} \quad y = 1$$

まとめると、 $y = 1$ ($x \leq -1$, $0 \leq x$) なので、複素数 α の範囲は右図の 2 つの半直線 (細線) である。すると、 $\beta = \alpha - 1 - i$ から、複素数 β の範囲は実軸上の 2 つの半直線 (太線) となる。



- (3) $|\beta| \leq 2$ として、複素数 z が $\textcircled{1}$ を満たすとき、(2) の結果から、 $\beta = -2$ または $\beta = t$ ($-1 \leq t \leq 2$) である。

- (i) $\beta = -2$ のとき $\alpha = 1 + i - 2 = -1 + i$ となり、 $\textcircled{2}$ から、

$$|z + \alpha|^2 = \{(-1)^2 + 1^2\} + (-1 + i) - 1 - i = 0$$

よって、 $z = -\alpha = 1 - i$ から、 $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ である。

- (ii) $\beta = t$ ($-1 \leq t \leq 2$) のとき $\alpha = 1 + i + t = (t + 1) + i$ となり、 $\textcircled{2}$ から、

$$|z + \alpha|^2 = \{(t + 1)^2 + 1^2\} + (t + 1 + i) - 1 - i = (t + 1)(t + 2)$$

これより、 z は中心 $-\alpha = -(t + 1) - i$ で、半径 $r = \sqrt{(t + 1)(t + 2)}$ の円周上の点となる。すると、 $|z|$ が最大となるのは、原点 O 、中心 $-\alpha$ 、点 z がこの順で一直線上に並ぶときであり、その最大値は $|-\alpha| + r$ である。

さて、 $|-\alpha| = \sqrt{(t + 1)^2 + 1}$ 、 $r = \sqrt{t^2 + 3t + 2} = \sqrt{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$ から、 $-1 \leq t \leq 2$ において $|-\alpha|$ と r はともに単調増加するので、 $t = 2$ のときに最大となり、

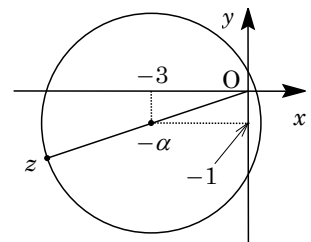
$$|-\alpha| = \sqrt{(2 + 1)^2 + 1} = \sqrt{10}$$

$$r = \sqrt{2^2 + 3 \cdot 2 + 2} = 2\sqrt{3}$$

よって、 $|z|$ の最大値は、

$$|-\alpha| + r = \sqrt{10} + 2\sqrt{3}$$

- (i)(ii) より、 $|z|$ の最大値は $\sqrt{10} + 2\sqrt{3}$ である。



したがって、 $|z|$ が最大になるのは、 $\beta = 2$ 、 $-\alpha = -3 - i$ のときであり、

$$z = \frac{\sqrt{10} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \cdot (-3 - i) = -\left(1 + \frac{\sqrt{30}}{5}\right)(3 + i)$$

[解説]

複素数と図形に関する問題です。(3)は2つの文字についての最大問題なので、やや記述しにくいところがあります。