1

解答解説のページへ

k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A, B を次のように定める。

$$A=\{x \mid x^3-x^2-(k^2+4k+4)x+k^2+4k+4=0\}$$
$$B=\{x \mid x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0\}$$

次の問いに答えよ。

(1)　$k=-1$ のとき，集合 A，B，$A\cap B$，$A\cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2)　集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3)　集合 $A\cup B$ の要素の個数を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の数とし，座標平面上の曲線 $C_1 : y = e^{ax}$，$C_2 : y = \sqrt{2x - b}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = e^{ax}$ と関数 $y = \sqrt{2x - b}$ の導関数を求めよ。

(2)　曲線 C_1 と曲線 C_2 が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとする。このとき，b と点 P の座標を a を用いて表せ。

(3)　(2)において，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとし，$w=-\dfrac{2(2z-i)}{z+1}$ $(z\neq-1)$ とする。ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) $z=i$ のときの w の実部と虚部を求めよ。

(2) z を w を用いて表せ。

(3) 点 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4) $|w|$ の最小値とそれを与える z を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ 5)$ を直径の両端とする球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 S の中心 C の座標と，S の方程式を求めよ。

(2) 点 P が S 上を動くとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積の最大値を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ が $\angle\mathrm{QCA}=\dfrac{\pi}{3}$ かつ $y\geqq 0$ を満たしながら S 上を動く。点 $\mathrm{R}(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4)$ に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　まず，$x^3-x^2-(k^2+4k+4)x+k^2+4k+4=0$ に対して，

$$x^2(x-1)-(k^2+4k+4)(x-1)=0,\ (x-1)\{x^2-(k+2)^2\}=0$$

$$(x-1)(x+k+2)(x-k-2)=0$$

また，$x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0$ に対して，

$$x^2\{x-(k^2+3k+3)\}+k^2\{x-(k^2+3k+3)\}=0$$

$$(x^2+k^2)(x-k^2-3k-3)=0$$

したがって，$A=\{x\,|\,(x-1)(x+k+2)(x-k-2)=0\}$………①

$B=\{x\,|\,(x^2+k^2)(x-k^2-3k-3)=0\}$………②

さて，$k=-1$ のとき，①から，$A=\{x\,|\,(x-1)^2(x+1)=0\}=\{-1,\ 1\}$

②から，$B=\{x\,|\,(x^2+1)(x-1)=0\}=\{1\}$ となり，

$A\cap B=\{1\}$，$A\cup B=\{-1,\ 1\}$

(2)　B の要素の個数について，②より $k=0$ のときは 2 個，$k\neq0$ のときは 1 個である。

ここで，B が A の部分集合となるのは，

(i)　$k=0$ のとき　$A=\{-2,\ 1,\ 2\}$，$B=\{0,\ 3\}$ なので，$B\subset A$ でない。

(ii)　$k\neq0$ のとき　$B=\{k^2+3k+3\}$ から，B が A の部分集合となる必要条件は，

①から，$k^2+3k+3=1$ または $k^2+3k+3=-k-2$ または $k^2+3k+3=k+2$

(ii-i)　$k^2+3k+3=1$ のとき　$(k+1)(k+2)=0$ から，$k=-1,\ -2$，

・$k=-1$ のとき　(1)より $B\subset A$ である。

・$k=-2$ のとき　$A=\{0,\ 1\}$，$B=\{1\}$ より，$B\subset A$ である。

(ii-ii)　$k^2+3k+3=-k-2$ のとき　$k^2+4k+5=0$ から，実数 k は存在しない。

(ii-iii)　$k^2+3k+3=k+2$ のとき　$(k+1)^2=0$ から $k=-1$ なので $B\subset A$ である。

(i)(ii)より，B が A の部分集合となるのは，$k=-1,\ -2$ のときである。

(3)　A の要素の個数について，①より，2 個となるのは，$1=-k-2\ (k=-3)$ のとき，$1=k+2\ (k=-1)$ のとき，$-k-2=k+2\ (k=-2)$ のときである。また，1 個だけとなるときはなく，$k\neq-3,\ -2,\ -1$ のときは 3 個である。

すると，$A\cup B$ の要素の個数を N とおくと，

(i)　$k=0$ のとき　(2)より $A\cup B=\{-2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ なので $N=5$

(ii)　$k=-1$ のとき　(1)より $A\cup B=\{-1,\ 1\}$ なので $N=2$

(iii)　$k=-2$ のとき　(2)より $A\cup B=\{0,\ 1\}$ なので $N=2$

(iv)　$k=-3$ のとき　$A=\{-1,\ 1\}$，$B=\{3\}$ から $A\cup B=\{-1,\ 1,\ 3\}$ より $N=3$

(v)　$k\neq-3,\ -2,\ -1,\ 0$ のとき　$A=\{1,\ -k-2,\ k+2\}$，$B=\{k^2+3k+3\}$

$A\cup B=\{1,\ -k-2,\ k+2,\ k^2+3k+3\}$ より $N=4$

(i)〜(v)より，$A\cup B$ の要素の個数は,

$k=-1,\ -2$ のとき 2 個，$k=-3$ のとき 3 個，$k=0$ のとき 5 個

$k\neq-3,\ -2,\ -1,\ 0$ のとき 4 個

［解 説］

集合を題材とした問題です。内容的には場合分けの方法が問われており，慎重な処理が要求されます。なお，冒頭の 2 つの 3 次方程式の因数分解については，係数に着目した方法を採っています。

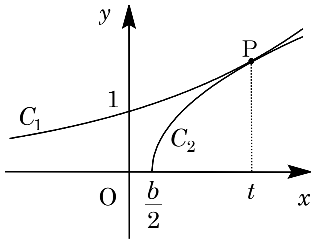
2

問題のページへ

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，$y=e^{ax}$ ……①に対して，$y'=ae^{ax}$

また，$y=\sqrt{2x-b}=(2x-b)^{\frac{1}{2}}$ ……②に対して，$y'=\dfrac{1}{2}(2x-b)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=\dfrac{1}{\sqrt{2x-b}}$

(2) 曲線 $C_1 : y=e^{ax}$ と $C_2 : y=\sqrt{2x-b}$ が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとき，点 P の x 座標を $x=t$ とおくと，(1)から，



$$ae^{at}=\frac{1}{\sqrt{2t-b}}\ \cdots\cdots①,\quad e^{at}=\sqrt{2t-b}\ \cdots\cdots②$$

①②より，$ae^{at}=\dfrac{1}{e^{at}}$ から $(e^{at})^2=\dfrac{1}{a}$ となり，

$$e^{at}=\frac{1}{\sqrt{a}},\quad t=\frac{1}{a}\log\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2a}\log a$$

すると，$\mathrm{P}(t,\ e^{at})$ から $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2a}\log a,\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ であり，②から $2t-b=(e^{at})^2$ なので，

$$b=2t-(e^{at})^2=-\frac{1}{a}\log a-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a}(1+\log a)$$

(3)　(2)のとき，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_0^t e^{ax}dx-\int_{\frac{b}{2}}^t\sqrt{2x-b}\,dx=\left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_0^t-\left[\frac{2}{3}(2x-b)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right]_{\frac{b}{2}}^t$$

$$=\frac{1}{a}(e^{at}-1)-\frac{1}{3}(2t-b)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)-\frac{1}{3a\sqrt{a}}$$

$$=\frac{1}{3a}\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-3\right)$$

［解　説］

2 曲線が接する条件を問う頻出問題です。なお，計算は穏やかです。

3

問題のページへ

(1)　$z=i$ のとき，$w=-\dfrac{2(2i-i)}{i+1}=-\dfrac{2i}{1+i}=-\dfrac{2i(1-i)}{2}=-1-i$

これより，w の実部は -1，虚部は -1 となる。

(2)　$w=-\dfrac{2(2z-i)}{z+1}$ $(z\neq-1)$ より $w(z+1)=-4z+2i$ となり，$(w+4)z=-(w-2i)$

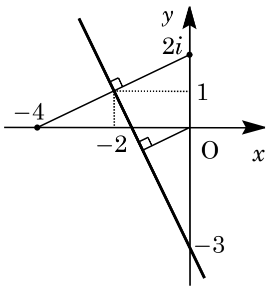
$w=-4$ のとき成り立たないので，$w\neq-4$ において $z=-\dfrac{w-2i}{w+4}$ ………①

(3)　点 z は原点を中心とする半径 1 の円周上を動くことより，$|z|=1$ ………②

①を②に代入して $\left|-\dfrac{w-2i}{w+4}\right|=1$ となり，$\dfrac{|w-2i|}{|w+4|}=1$ から，

$|w-2i|=|w+4|$　$(w\neq-4)$

すると，点 w は点 $2i$ と点 -4 を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。図示すると，右図の太い直線となる。



(4)　(3)の点 w の描く図形について，$w=x+yi$ とおくと，

$y-1=-2(x+2)$，$2x+y+3=0$ ………③

すると，$|w|$ の最小値は原点と直線③の距離になり，$\dfrac{|3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt5}$ である。

そして，このときの w は，$|-4-2i|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt5$ から，

$$w=\frac{3}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{2\sqrt5}(-4-2i)=\frac{3}{10}(-4-2i)=-\frac{6+3i}{5}$$

対応する z は，①から，

$$z=-\frac{-\dfrac{6+3i}{5}-2i}{-\dfrac{6+3i}{5}+4}=\frac{6+13i}{14-3i}=\frac{(6+13i)(14+3i)}{14^2+3^2}=\frac{45+200i}{205}=\frac{9+40i}{41}$$

［解　説］

複素数平面上の変換についての頻出題です。なお，(3)は先に $w=x+yi$ として③を導いてから図を描いても構いません。

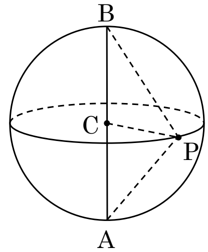
4

問題のページへ

(1)　2 点 A$(1,\ -1,\ 1)$，B$(1,\ -1,\ 5)$ を直径の両端とする球面 S は，中心 C の座標が $\left(\dfrac{1+1}{2},\ \dfrac{-1-1}{2},\ \dfrac{1+5}{2}\right)=(1,\ -1,\ 3)$ であり，半径が $\mathrm{AC}=3-1=2$ より，

$$S:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4 \cdots\cdots\cdots①$$

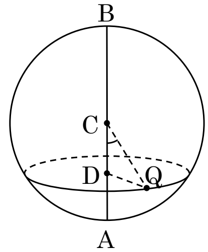
(2)　点 P が S 上を動くとき，△ABP の面積が最大になるのは，P と z 軸に平行な直線 AB との距離が最大になるときである。



すなわち，P が中心 C を通り AB に垂直な平面と S との交線上にあるときになる。このときの△ABP の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$$

(3)　点 Q$(x,\ y,\ z)$ が $\angle\mathrm{QCA}=\dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，Q は点 C を頂点とし，中心軸と母線のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ である円錐側面上にあり，



$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\right|\cos\frac{\pi}{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(0,\ 0,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(x-1,\ y+1,\ z-3)$ から，

$$-2(z-3)=2\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$-2(z-3)=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

これより，球面 S と円錐側面の交線は①かつ②で表せ，①を②に代入すると，

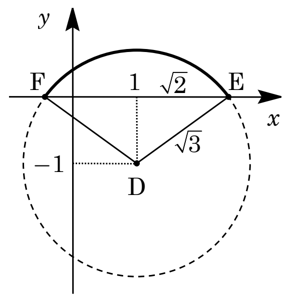
$$-2(z-3)=2,\ z=2\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，③を①に代入すると，$(x-1)^2+(y+1)^2+(2-3)^2=4$ から，

$$(x-1)^2+(y+1)^2=3\cdots\cdots\cdots④$$

したがって，球面 S と円錐側面の交線は，③かつ④で表せることになる。

これより，点 Q は平面 $z=2$ 上で，中心 D$(1,\ -1,\ 2)$，半径 $\sqrt{3}$ の円を描く。



さらに，$y\geqq0$ という条件を加えると，点 Q$(x,\ y,\ 2)$ は平面 $z=2$ 上で右図の弧 EF (太線部)を動くことになる。なお，E$(1+\sqrt{2},\ 0,\ 2)$，F$(1-\sqrt{2},\ 0,\ 2)$ である。

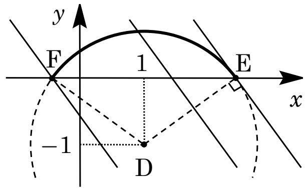
さて，点 R$(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=(\sqrt{2},\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(x-1,\ y+1,\ -1)$ であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\sqrt{2}(x-1)+(y+1)-1=\sqrt{2}x+y-\sqrt{2}$$

ここで，$\sqrt{2}x+y-\sqrt{2}=k$ とおくと，$y=-\sqrt{2}x+k+\sqrt{2}\cdots\cdots④$から，$z=2$ 上で傾き $-\sqrt{2}$ の直線群を表す。そして，k のとりうる値は，直線④が右上図の弧 EF と共有点をもつ範囲として求められる。

まず，線分 DE は直線④と垂直であることに注目して，直線④が点 E を通るとき，

$$k=\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+0-\sqrt{2}=2$$



また，直線④が点 F を通るとき，

$$k=\sqrt{2}(1-\sqrt{2})+0-\sqrt{2}=-2$$

これより，k のとりうる値の範囲は $-2\leqq k\leqq 2$ となるので，

$$-2\leqq\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}\leqq 2$$

［解 説］

空間図形と最大・最小を組み合わせた問題です。ただ，直線 AB が z 軸に平行であるように問題が設定されているため，見かけよりは穏やかです。なお，(3)の円錐側面の扱い方については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。