1

解答解説のページへ

座標平面の原点を O とする。座標平面上の直線 $y=-2\sqrt{2}x+\sqrt{3}$ を l_1 とし，直線 $y=\sqrt{3}x$ を l_2 とする。また，l_1 と x 軸の交点を A とし，l_1 と l_2 の交点を B とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 A と点 B の座標を求めよ。

(2)　△OAB の重心の座標を求めよ。

(3)　△OAB の内接円の中心の座標と半径を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$\angle$A が直角である直角三角形 ABC がある。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$ である。正の数 s, t に対して，線分 AB, BC, CA を $s:t$ の比に内分する点をそれぞれ D, E, F とする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおいたとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ および s, t を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が垂直となるような $\dfrac{s}{t}$ の値をすべて求めよ。

(3)　$8s \leqq 9t$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は垂直にならないことを示せ。

3

解答解説のページへ

座標平面の原点を O とし，3 点 $A(-2,\ 0)$，$B(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$C(3\cos 3\theta,\ 3\sin 3\theta)$ をとる。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　AB^2 と BC^2 を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$AB^2 + BC^2$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの点 B の座標を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

正の数 $a,\ b$ に対して，$S=\left\{\int_0^a (2x+b)\,dx\right\}^2$，$T=\int_0^a (2x+b)^2\,dx$ とおく。次の問いに答えよ。

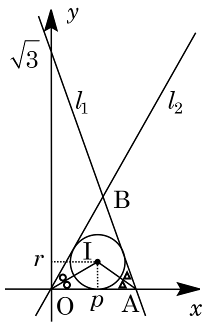
(1)　$S,\ T$ を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$b=a$ で $0<a\leqq 1$ のとき，$\dfrac{T-S}{a}$ の最大値を求めよ。

(3)　$0<a\leqq 1$ のとき，$S<T$ が成り立つことを示せ。

1

問題のページへ



(1)　$l_1 : y=-2\sqrt{2}x+\sqrt{3}$ ……①，$l_2 : y=\sqrt{3}x$ ……②に対し，l_1 と x 軸の交点 A は，①から $0=-2\sqrt{2}x+\sqrt{3}$ より $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ となり，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},\ 0\right)$である。

また，l_1 と l_2 の交点 B は，①②から $-2\sqrt{2}x+\sqrt{3}=\sqrt{3}x$ となり，

$$(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x=\sqrt{3}\,,\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}-3}{5}$$

そして，$y=\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}-3}{5}=\dfrac{6\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5}$ から，$\mathrm{B}\left(\dfrac{2\sqrt{6}-3}{5},\ \dfrac{6\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5}\right)$である。

(2)　△OAB の重心を $\mathrm{G}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{2\sqrt{6}-3}{5}\right)=\frac{13\sqrt{6}-12}{60}\,,\quad y=\frac{1}{3}\cdot\frac{6\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$$

これより，$\mathrm{G}\left(\dfrac{13\sqrt{6}-12}{60},\ \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}\right)$である。

(3)　△OAB の内接円の半径を r とすると，内心 I は $\mathrm{I}(p,\ r)$ とおくことができる。

ここで，点 I は∠AOB の二等分線上，かつ∠BAO の二等分線上にあることから，$l_1 : 2\sqrt{2}x+y-\sqrt{3}=0$，$l_2 : \sqrt{3}x-y=0$ と変形して，

$$\frac{|\sqrt{3}p-r|}{\sqrt{3+1}}=r\ \cdots\cdots\cdots③,\quad \frac{|2\sqrt{2}p+r-\sqrt{3}|}{\sqrt{8+1}}=r\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，$\mathrm{I}(p,\ r)$ は l_1 と l_2 の下側にあることより，$r<-2\sqrt{2}p+\sqrt{3}$，$r<\sqrt{3}p$

すると，③は $\sqrt{3}p-r=2r$ となり，$p=\sqrt{3}r$ ………⑤

④は $-2\sqrt{2}p-r+\sqrt{3}=3r$ となり，$-2\sqrt{2}p+\sqrt{3}=4r$ ………⑥

⑤⑥より，$-2\sqrt{6}r+\sqrt{3}=4r$ から，$(2\sqrt{6}+4)r=\sqrt{3}$ となり，

$$r=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+4}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\,,\quad p=\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{6}-6}{4}$$

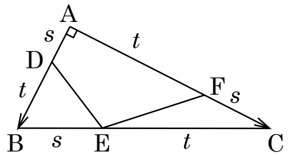
これより，$\mathrm{I}\left(\dfrac{3\sqrt{6}-6}{4},\ \dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\right)$である。

［解　説］

内接円を題材にした点と直線の基本題です。ただ，数値計算はやや面倒です。

2

問題のページへ



(1)　$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおいたとき，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$

また，$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ から，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

このとき，線分 AB，BC，CA を $s:t$ の比に内分する点をそれぞれ D, E, F とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{t\vec{b}+s\vec{c}}{s+t}-\frac{s\vec{b}}{s+t}=\frac{t-s}{s+t}\vec{b}+\frac{s}{s+t}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{t\vec{c}}{s+t}-\frac{t\vec{b}+s\vec{c}}{s+t}=-\frac{t}{s+t}\vec{b}+\frac{t-s}{s+t}\vec{c}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}=0$ となり，(1)から，

$$\frac{1}{s+t}\{(t-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot\frac{1}{s+t}\{-t\vec{b}+(t-s)\vec{c}\}=0$$

すると，$-t(t-s)\cdot1^2+s(t-s)\cdot2^2=0$ となり，$-4s^2+5st-t^2=0$ から，

$$4\left(\frac{s}{t}\right)^2-5\cdot\frac{s}{t}+1=0,\ \left(\frac{s}{t}-1\right)\left(4\cdot\frac{s}{t}-1\right)=0$$

これより，$\dfrac{s}{t}=1,\ \dfrac{1}{4}$ となる。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{s\vec{b}}{s+t}-\vec{c}=\dfrac{1}{s+t}\{s\vec{b}-(s+t)\vec{c}\}$ となり，$8s\leqq 9t$ のとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}&=\frac{1}{s+t}\{s\vec{b}-(s+t)\vec{c}\}\cdot\frac{1}{s+t}\{-t\vec{b}+(t-s)\vec{c}\}\\&=\frac{1}{(s+t)^2}\{-st\cdot1^2-(t^2-s^2)\cdot2^2\}=\frac{1}{(s+t)^2}(4s^2-st-4t^2)\\&=\frac{t^2}{(s+t)^2}\left\{4\left(\frac{s}{t}\right)^2-\frac{s}{t}-4\right\}=\left(\frac{t}{s+t}\right)^2\left\{4\left(\frac{s}{t}-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{65}{16}\right\}\end{aligned}$$

ここで，$u=\dfrac{s}{t}$ とおくと，$0<\dfrac{s}{t}\leqq\dfrac{9}{8}$ から $0<u\leqq\dfrac{9}{8}$ となる。

さらに，$f(u)=4\left(u-\dfrac{1}{8}\right)^2-\dfrac{65}{16}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\dfrac{1}{(u+1)^2}f(u)$ となり，

$$f\left(\frac{1}{8}\right)\leqq f(u)\leqq f\left(\frac{9}{8}\right),\ -\frac{65}{16}\leqq f(u)\leqq-\frac{1}{16}$$

すると，$0<u\leqq\dfrac{9}{8}$ において $f(u)<0$ なので，これより $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}<0$ から $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は垂直にならない。

［解　説］

平面ベクトルと三角形について，基本事項を確認する問題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(3\cos 3\theta,\ 3\sin 3\theta)$ に対して，

$$\mathrm{AB}^2=(\cos\theta+2)^2+\sin^2\theta=1+4\cos\theta+4=5+4\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=(3\cos 3\theta-\cos\theta)^2+(3\sin 3\theta-\sin\theta)^2\\&=9-6(\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta)+1=10-6\cos(3\theta-\theta)\\&=10-6\cos 2\theta=10-6(2\cos^2\theta-1)=16-12\cos^2\theta\end{aligned}$$

(2)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ において $-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq 1$ であり，(1)から，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2&=(5+4\cos\theta)+(16-12\cos^2\theta)=-12\cos^2\theta+4\cos\theta+21\\&=-12\left(\cos\theta-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{64}{3}\end{aligned}$$

すると，$\cos\theta=\dfrac{1}{6}$ のとき $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$ は最大値 $\dfrac{64}{3}$ をとる。このとき $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$ から点 B の座標は $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{\sqrt{35}}{6}\right)$ である。

また，$\cos\theta=1$ のとき $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$ は最小値 13 をとる。このとき $\sin\theta=0$ から点 B の座標は $\mathrm{B}(1,\ 0)$ である。

［解　説］

三角関数の計算問題です。複雑な式変形もありません。

4

問題のページへ

(1)　$S=\left\{\int_0^a(2x+b)\,dx\right\}^2=\left(\left[x^2+bx\right]_0^a\right)^2=(a^2+ab)^2=a^4+2a^3b+a^2b^2$

$$T=\int_0^a(2x+b)^2dx=\int_0^a(4x^2+4bx+b^2)\,dx=\left[\frac{4}{3}x^3+2bx^2+b^2x\right]_0^a$$
$$=\frac{4}{3}a^3+2a^2b+ab^2$$

(2)　$b=a$ のとき，$S=a^4+2a^4+a^4=4a^4$，$T=\frac{4}{3}a^3+2a^3+a^3=\frac{13}{3}a^3$ となり，

$$\frac{T-S}{a}=\frac{13}{3}a^2-4a^3$$

ここで，$0<a\leqq 1$ において，$f(a)=\frac{13}{3}a^2-4a^3$ とおくと，

$$f'(a)=\frac{26}{3}a-12a^2=\frac{2}{3}a(13-18a)$$

これより，$f(a)$ は増減が右表のようになり，最大値は，

a	0	$\cdots$	$\frac{13}{18}$	$\cdots$	1
$f'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f\left(\frac{13}{18}\right)=\left(\frac{13}{18}\right)^2\left(\frac{13}{3}-4\cdot\frac{13}{18}\right)=\frac{2197}{2916}$$

したがって，$\frac{T-S}{a}$ の最大値は $\frac{2197}{2916}$ である。

(3)　$0<a\leqq 1$ において，

$$\frac{T-S}{a}=\left(\frac{4}{3}a^2+2ab+b^2\right)-(a^3+2a^2b+ab^2)$$
$$=(1-a)b^2+2(a-a^2)b+\frac{4}{3}a^2-a^3$$

(i)　$a=1$ のとき　$\frac{T-S}{a}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}>0$

(ii)　$0<a<1$ のとき　$1-a>0$ となり，

$$\frac{T-S}{a}=(1-a)(b+a)^2-a^2(1-a)+\frac{4}{3}a^2-a^3=(1-a)(b+a)^2+\frac{1}{3}a^2>0$$

(i)(ii)より，$\frac{T-S}{a}>0$ となり，$S<T$ が成り立つ。

［解　説］

微積分の総合問題です。計算は平易です。(3)は a と b の次数を比べて，小さい方の b について整理しました。