**1**

解答解説のページへ

座標空間において，3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ -2)$ の定める平面を $\alpha$ とし，方程式 $x^2+y^2+z^2+2x-10y+4z+21=0$ が表す球面を $S$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 $S$ の中心 P の座標と $S$ の半径を求めよ。

(2) 実数 $s,\ t$ に対して，点 D を $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たすようにとる。このとき，D の座標を $s, t$ を用いて表せ。

(3) 点 Q が平面 $\alpha$ 上を動き，点 R が球面 $S$ 上を動くとき，Q と R の距離の最小値を求めよ。また，そのときの Q と R の座標をそれぞれ求めよ。

**2**

解答解説のページへ

$n$, $k$ を自然数とする。$n$ 個のボールと $k$ 個の箱がある。各箱は箱 1, 箱 2, …, 箱 $k$ のように表すものとする。$n$ 個のボールを $k$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。$n$ 個のボールを投げ入れた後，箱 $i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ に入っているボールの個数を $a_i$ とする。このとき，$a_1+a_2+\cdots+a_k=n$ となる。次の問いに答えよ。

(1)　$n=4$，$k=5$ とする。このとき，$a_1=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$k \geqq 2$ とする。このとき，$a_1 \times a_2 = 0$ となる確率を $n, k$ を用いて表せ。

(3)　$k=4$ とする。このとき，$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \neq 0$ となる確率を $p_n$ とする。$p_n$ の値を $n$ を用いて表せ。

(4)　$k=4$ とし，$p_n$ を (3) で求めたものとする。このとき，$r>0$ で数列 $\{r^n(p_{n+1}-p_n)\}$ が収束するような $r$ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$a$ を $0<a<1$ となる実数とする。座標平面上において，長さが 4 の線分 PQ を考える。線分 PQ の端点 P は $x$ 軸上を，端点 Q は $y$ 軸上を動くとき，線分 PQ を $a:(1-a)$ の比に内分する点 R の軌跡は楕円になる。この楕円を $C$ とする。ただし，円は楕円の特別な場合とする。次の問いに答えよ。

(1) 楕円 $C$ の方程式を $a$ を用いて表せ。

(2) 楕円 $C$ で囲まれた部分と連立不等式 $x \geqq 0$，$\sqrt{3}ax \geqq (1-a)y$ の表す領域の共通部分の面積を $S$ とする。$S$ を $a$ を用いて表せ。

(3) 面積 $S$ の最大値とそのときの $a$ の値を求めよ。

**4**

解答解説のページへ

実数 $t$ に対して，複素数 $z$ を次の条件(Ⅰ),(Ⅱ)を満たすようにとる。

(Ⅰ)　$z$ の虚部は 0 以上である。　　(Ⅱ)　$z^2-2t^3z+t^6+9t^2=0$

この $z$ に対して，複素数 $w$ を $w=i\overline{z}$ とおく。ただし，$i$ は虚数単位とし，$\overline{z}$ は $z$ の共役複素数とする。次の問いに答えよ。

(1)　複素数 $z$ と $w$ を $t$ を用いて表せ。

(2)　$0\leqq t\leqq 2$ のとき，$|z-w|$ の最大値を求めよ。また，そのときの $t$ の値をすべて求めよ。

(3)　実数 $t$ を動かしたとき，複素数平面上で $z$ が表す点が描く曲線を $C_1$ とし，$w$ が表す点が描く曲線を $C_2$ とする。$C_1$ と $C_2$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1)　$S: x^2+y^2+z^2+2x-10y+4z+21=0$ に対して，

$$(x+1)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=9$$

これより，球面 $S$ の中心は $\mathrm{P}(-1,\ 5,\ -2)$，半径は $r=\sqrt{9}=3$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ -2)$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s-t)(1,\ 0,\ 0)+s(0,\ -1,\ 0)+t(0,\ 0,\ -2)$$
$$=(1-s-t,\ -s,\ -2t)$$

これより，$\mathrm{D}(1-s-t,\ -s,\ -2t)$ である。

(3)　3 点 A, B, C を含む平面 $\alpha$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ -2)$

さて，点 P から $\alpha$ に下ろした垂線の足 H は，$\mathrm{H}(1-s-t,\ -s,\ -2t)$ と表され，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(1-s-t+1,\ -s-5,\ -2t+2)=(-s-t+2,\ -s-5,\ -2t+2)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となり，

$$-(-s-t+2)-(-s-5)=0\cdots\cdots①,\quad -(-s-t+2)-2(-2t+2)=0\cdots\cdots②$$

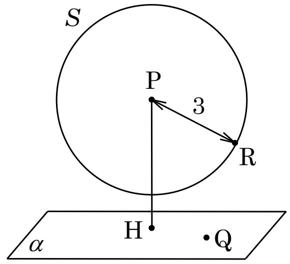
①から $2s+t=-3$，②から $s+5t=6$ となり，まとめると $s=-\dfrac{7}{3}$，$t=\dfrac{5}{3}$ である。

すると，$\mathrm{H}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{3},\ -\dfrac{10}{3}\right)$ となり，

$$\mathrm{PH}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}+1\right)^2+\left(\frac{7}{3}-5\right)^2+\left(-\frac{10}{3}+2\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{64}{9}+\frac{16}{9}}=4$$

これより，$\mathrm{PH}>r$ となり，平面 $\alpha$ 上を動く点 Q と球面 $S$ 上を動く点 R の距離の最小値は，

$$\mathrm{PH}-r=4-3=1$$




このときの点 Q は，点 H と一致するので，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ -\frac{10}{3}\right)$$

そして，点 R は線分 PH を $3:1$ に内分する点となり，

$\left(\dfrac{-1+5}{4},\ \dfrac{5+7}{4},\ \dfrac{-2-10}{4}\right)$ から $\mathrm{R}(1,\ 3,\ -3)$ である。

### ［解 説］

球面と平面の関係の問題です。誘導に従って解いていきましたが，初めに平面の方程式を立式し，点と平面の距離の公式を利用すると，記述量が減少します。

**2**

問題のページへ

$n$ 個のボールを $k$ 個の箱へ投げ入れ，箱 $i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ に入っているボールの個数を $a_i$ とおく。このとき，$a_1+a_2+\cdots+a_k=n$ である。

(1)　$n=4$，$k=5$ のとき，$a_1=0$ となるのは，ボールを箱 1 以外に投げ入れる場合より，その確率は $\dfrac{4^4}{5^4}=\dfrac{256}{625}$ である。

(2)　$a_i=0$ となる事象を $A_i$ とし，その確率を $P(A_i)$ とおく。

さて，$k\geqq 2$ のとき，$a_1\times a_2=0$ となる事象は $A_1\cup A_2$ であり，(1)と同様に考え，

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$$
$$=\frac{(k-1)^n}{k^n}+\frac{(k-1)^n}{k^n}-\frac{(k-2)^n}{k^n}=\frac{2(k-1)^n-(k-2)^n}{k^n}$$

(3)　$k=4$ のとき，$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=0$ となる事象は $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ であり，

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)+P(A_4)-P((A_1\cup A_2\cup A_3)\cap A_4)$$

ここで，$Q=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$，$R=P((A_1\cup A_2\cup A_3)\cap A_4)$ とおくと，

$$Q=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)$$
$$+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$
$$R=P((A_1\cap A_4)\cup(A_2\cap A_4)\cup(A_3\cap A_4))$$
$$=P(A_1\cap A_4)+P(A_2\cap A_4)+P(A_3\cap A_4)-P(A_1\cap A_2\cap A_4)$$
$$-P(A_1\cap A_3\cap A_4)-P(A_2\cap A_3\cap A_4)+P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$$

まとめると，$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$ は，

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_1\cap A_4)$$
$$-P(A_2\cap A_3)-P(A_2\cap A_4)-P(A_3\cap A_4)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_4)$$
$$+P(A_1\cap A_3\cap A_4)+P(A_2\cap A_3\cap A_4)-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(1)(2)と同様に考えると，

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=4\cdot\frac{3^n}{4^n}-6\cdot\frac{2^n}{4^n}+4\cdot\frac{1^n}{4^n}-0=\frac{4\cdot 3^n-6\cdot 2^n+4}{4^n}$$

したがって，$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\neq 0$ となる確率 $p_n$ は，

$$p_n=1-\frac{4\cdot 3^n-6\cdot 2^n+4}{4^n}$$

(4)　$$p_{n+1}-p_n=\left(1-\frac{4\cdot 3^{n+1}-6\cdot 2^{n+1}+4}{4^{n+1}}\right)-\left(1-\frac{4\cdot 3^n-6\cdot 2^n+4}{4^n}\right)$$
$$=\frac{-(4\cdot 3^{n+1}-6\cdot 2^{n+1}+4)+(16\cdot 3^n-24\cdot 2^n+16)}{4^{n+1}}=\frac{4\cdot 3^n-12\cdot 2^n+12}{4^{n+1}}$$
$$=\left(\frac{3}{4}\right)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\left\{1-3\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

これより，$r^n(p_{n+1}-p_n)=\left(\dfrac{3}{4}r\right)^n\left\{1-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$ となる。

すると，$\{r^n(p_{n+1}-p_n)\}$ が収束する正の数 $r$ の条件は，$0<\dfrac{3}{4}r\leqq 1$ より，$0<r\leqq\dfrac{4}{3}$ である。

［解 説］

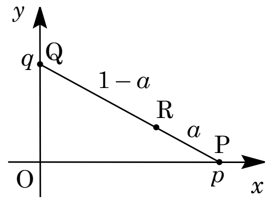
確率の標準的な問題です。(3)は設問の流れから，4 つの事象の和事象の確率として求めましたが，確認のため(＊)の式を導くプロセスも記しておきました。なお，空箱の数で場合分けする方法もありますが。

## 3

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q)$に対して，$\mathrm{PQ}=4$より，

$$\sqrt{p^2+q^2}=4,\ p^2+q^2=16\cdots\cdots\cdots①$$



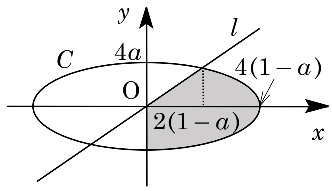

ここで，$0<a<1$として，線分 PQ を$a:(1-a)$の比に内分する点を$\mathrm{R}(x,\ y)$とおくと，$x=(1-a)p$，$y=aq$から，

$$p=\frac{x}{1-a}\cdots\cdots\cdots②,\ q=\frac{y}{a}\cdots\cdots\cdots③$$

②③を①に代入すると，点 R の軌跡$C$の方程式は,

$$\left(\frac{x}{1-a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2=16,\ \frac{x^2}{16(1-a)^2}+\frac{y^2}{16a^2}=1\cdots\cdots\cdots④$$

(2)　$\dfrac{x^2}{16(1-a)^2}+\dfrac{y^2}{16a^2}\leqq 1$，$x\geqq 0$，$\sqrt{3}ax\geqq(1-a)y$で表される領域$D$について，$C$と$l:\sqrt{3}ax=(1-a)y$の交点は，④と$\dfrac{\sqrt{3}x}{1-a}=\dfrac{y}{a}$を連立して，



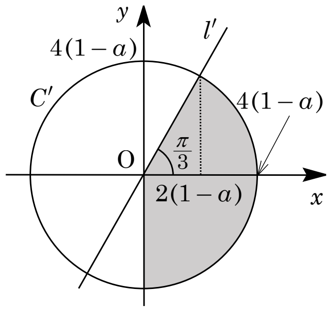

$$\left(\frac{x}{1-a}\right)^2+3\left(\frac{x}{1-a}\right)^2=16,\ \left(\frac{x}{1-a}\right)^2=4$$

すると，$x^2=4(1-a)^2$となり，$x>0$から$x=2(1-a)$である。

このとき，領域$D$の面積を$S$とする。

さて，右上図を$y$軸方向に$\dfrac{1-a}{a}$倍すると，曲線$C$は中心が原点で半径が$4(1-a)$の円$C'$となり，また直線$l:\sqrt{3}ax=(1-a)y$は直線$l':\sqrt{3}x=y$になる。

すると，直線$l'$と$x$軸の正の向きとなす角は$\dfrac{\pi}{3}$であるので，右図の網点部の領域$D'$の面積$S'$は,




$$S'=\frac{1}{2}\{4(1-a)\}^2\cdot\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{20}{3}\pi(1-a)^2$$

これより，$S=\dfrac{a}{1-a}S'=\dfrac{a}{1-a}\cdot\dfrac{20}{3}\pi(1-a)^2=\dfrac{20}{3}\pi a(1-a)$となる。

(3)　(2)から，$S=\dfrac{20}{3}\pi(a-a^2)=\dfrac{20}{3}\pi\left\{-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right\}$

すると，$0<a<1$から，面積$S$は$a=\dfrac{1}{2}$のとき最大値$\dfrac{20}{3}\pi\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{3}\pi$をとる。

### ［解 説］

楕円についての有名問題です。(2)は楕円を円に変換して面積計算をしました。

**4**

問題のページへ

(1)　$z^2-2t^3z+t^6+9t^2=0$ に対して,

$$z=t^3\pm\sqrt{t^6-(t^6+9t^2)}=t^3\pm\sqrt{-9t^2}=t^3\pm3|t|i$$

$z$ の虚部は 0 以上から, $z=t^3+3|t|i$ ………①

また, $w=i\bar{z}$ から, $w=i(t^3-3|t|i)=3|t|+t^3i$ ………②

(2)　$0\leqq t\leqq2$ のとき, ①から $z=t^3+3ti$, ②から $w=3t+t^3i$ となり,

$$z-w=(t^3-3t)+(3t-t^3)i$$

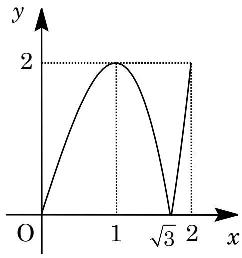
$$|z-w|=\sqrt{(t^3-3t)^2+(3t-t^3)^2}=\sqrt{2(t^3-3t)^2}=\sqrt{2}|t^3-3t|$$

ここで, $f(t)=t^3-3t$ とおくと,

$$f'(t)=3t^2-3=3(t-1)(t+1)$$

すると, $0\leqq t\leqq2$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。これより, $y=|f(t)|$ のグラフは, 右図の通りである。

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(t)$ | 0 | ↘ | $-2$ | ↗ | 2 |




したがって, $|z-w|=\sqrt{2}|f(t)|$ より, $|z-w|$ の最大値は $2\sqrt{2}$ である。このときの $t$ の値は, $t=1,\ 2$ となる。

(3)　$z=x+yi$ とおくと, $z$ の軌跡 $C_1$ は, ①から,

$$C_1: x=t^3,\ y=3|t|\ \cdots\cdots\cdots③$$

同様に, $w=x+yi$ とおくと, $w$ の軌跡 $C_2$ は, ②から,

$$C_2: x=3|t|,\ y=t^3\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より, 曲線 $C_1$ と曲線 $C_2$ は直線 $y=x$ について対称である。

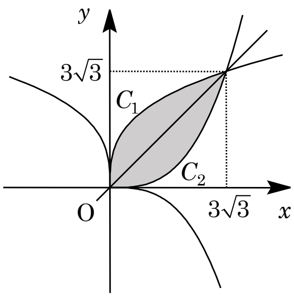
さて, 曲線 $C_2$ について, ④から,

・$t\geqq0$ のとき　$x=3t$, $y=t^3$ から $y=\dfrac{x^3}{27}$ $(x\geqq0)$

・$t\leqq0$ のとき　$x=-3t$, $y=t^3$ から $y=-\dfrac{x^3}{27}$ $(x\geqq0)$

また, 曲線 $C_2$ と直線 $y=x$ $(x\geqq0)$ の交点は, $x=\dfrac{x^3}{27}$ より $x=0,\ 3\sqrt{3}$ である。

これより, 曲線 $C_1$ と曲線 $C_2$ を図示すると, 右図のようになり, $C_1$ と $C_2$ で囲まれる図形の面積 $S$ は,




$$S=2\int_0^{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{x^3}{27}\right)dx=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{108}\right]_0^{3\sqrt{3}}=27-\frac{27^2}{54}=\frac{27}{2}$$

## ［解 説］

複素数平面上の軌跡に面積計算を加えた問題です。